



**Andreia Marques
Freitas Louro**

**Computação Simbólica em Maple
no Cálculo das Variações**



**Andreia Marques
Freitas Louro**

Computação Simbólica em Maple no Cálculo das Variações

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática, realizada sob a orientação científica do Prof. Doutor Delfim Fernando Marado Torres, Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

o júri

presidente

Prof. Doutor Vitor Manuel Carvalho das Neves

Professor Associado da Universidade de Aveiro

vogais

Prof. Doutora Margarida Maria Lopes da Silva Camarinha

Professora Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia
da Universidade de Coimbra

Prof. Doutor Delfim Marado Torres

Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro

agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, o Prof. Doutor Delfim Fernando Marado Torres, pela constante disponibilidade e por todo o apoio e motivação que me deu em todos os momentos da elaboração desta dissertação. O seu apoio científico foi indiscutível e ser sua orientanda um enorme privilégio. Quero expressar também a minha gratidão à minha família pela constante assistência e encorajamento que me deram ao longo de toda esta época de trabalho.

Palavras-chave

Cálculo das Variações, equação de Euler-Lagrange, Braquistócrona, Maple.

Resumo

Ao longo desta dissertação vamos explorar o sistema de computação algébrica Maple 9.5, com a finalidade de identificar e ilustrar as suas potencialidades e fraquezas na área do Cálculo das Variações: uma área clássica da Matemática que estuda os métodos que permitem encontrar valores máximos e mínimos de funcionais do tipo integral. Começamos por formular o problema elementar do Cálculo das Variações e por apresentar a resolução de diversos problemas solucionados pela aplicação das condições necessárias de Euler-Lagrange. Parte dos problemas variacionais são normalmente resolvidos por recurso a estas condições, que são, em geral, equações diferenciais de segunda ordem, não lineares e de difícil resolução. De seguida, determinamos a funcional integral para o problema clássico da Braquistócrona e, depois de apresentarmos a formulação matemática para o mesmo, mostramos como o podemos resolver sob o ponto de vista da teoria do Cálculo das Variações e do Maple. A extremal para o problema da Braquistócrona será apresentada na forma paramétrica e será calculado o tempo de descida mínimo para a curva encontrada. Finalmente, reformulamos o problema clássico da Braquistócrona restringindo a classe das funções admissíveis e verificamos que, apesar do problema ter cerca de trezentos anos, existem questões sobre a Braquistócrona para as quais parece, ainda, não haver resposta.

Keywords

Calculus of Variations, Euler-Lagrange equation, Brachistochrone, Maple.

Abstract

Along this dissertation we are going to explore the computer algebra system Maple 9.5, with the purpose of identify and illustrate its potentialities and weaknesses in the area of the Calculus of Variations: a classical mathematical area which studies the methods to get the maximum and minimum values of integral functionals. We start by formulate the elementary problem of Calculus of Variations and by presenting the resolutions of some problems solved using the Euler-Lagrange necessary conditions. Most part of variational problems are usually solved with the help of this conditions, which are, in general, second order differential equations, nonlinear and hard to solve. After we determinate the integral functional for the classical Brachistochrone problem and, after we present its mathematical formulation, we show how we can solve it by the point of view of the Calculus of Variations and using Maple. The extremal for Brachistochrone problem will be presented in the parametric form and the minimum time of descent for such curve will be calculated. Finally, we reformulate the Brachistochrone classical problem by restricting the class of admissible curves noticing that, although the problem is three hundred years old, there are questions about Brachistochrone for which answers seems to be unknown.

Conteúdo

Introdução	1
1 Cálculo das Variações	5
1.1 Introdução	5
1.2 Problema Elementar do Cálculo das Variações	7
1.3 Equação de Euler-Lagrange	7
1.3.1 Alguns Casos de Integrabilidade da Equação de Euler-Lagrange	10
1.4 Problema Isoperimétrico	22
1.5 Algumas extensões do problema elementar	25
1.5.1 Problema do cálculo das variações com duas variáveis dependentes . .	25
1.5.2 Problema do cálculo das variações com derivadas de ordem superior .	26
1.6 Conclusão	31
2 O Problema da Braquistócrona	33
2.1 Introdução	33
2.2 Formulação do problema	34
2.3 A Ciclóide	36
2.4 Solução da equação de Euler-Lagrange no caso da Braquistócrona	38
2.4.1 Exemplos	44
2.5 Conclusão	50
3 Variante do Problema da Braquistócrona	53
3.1 Introdução	53
3.2 Reformulação do problema da Braquistócrona	54
3.3 Questão	55
3.3.1 Interpolação racional de Thiele	57
3.3.2 Exemplo	58
3.4 Integração da equação de Euler-Lagrange	60
3.5 Conclusão	63

Conclusão	65
Apêndices	69
A Função criada em Maple	69
B Cálculos Auxiliares	71
B.0.1 Polinómio de Taylor	71
B.0.2 Cálculos auxiliares relativos ao exemplo em §3.3.2	71
Bibliografia	75
Índice Remissivo	79

Introdução

Os tempos actuais são tempos de profunda transformação tecnológica originada pela rápida evolução e difusão de novas tecnologias, em particular as associadas aos computadores e às comunicações. Estas tecnologias estão a alterar significativamente não apenas os processos de produção de bens materiais mas também os processos de difusão das ideias e, consequentemente, os modos de viver em sociedade. São novas profissões que surgem, são novas áreas de conhecimento, novos materiais, instrumentos e formas de organização do trabalho que se afirmam. As aplicações da tecnologia computacional incluem áreas tão diversas como a investigação científica, a gestão das grandes empresas, o controlo dos processos de produção industrial, e o seu uso como meio de diversão ou como auxiliar da aprendizagem. Em todas as áreas que tem influenciado, a Informática sugeriu novos métodos de trabalho e ajudou à formulação e resolução de novos problemas.

Nestes últimos anos temos visto o "crescer" de uma matemática experimental, nomeadamente, da utilização de modernas tecnologias computacionais como ferramentas activas na investigação matemática: a ideia de que "os verdadeiros matemáticos não recorrem a tecnologias" começa a estar ultrapassada.

Claramente um dos principais factores para tal crescimento é o desenvolvimento, contínuo, de poderosos softwares matemáticos.

As ferramentas computacionais têm sido usadas para encontrar resultados de exemplos específicos, gerar gráficos, efectuar cálculos e várias manipulações algébricas, testar conjecturas e explorar caminhos que levem a efectuar demonstrações formais [2].

Os recursos gráficos, numéricos e algébricos, aliados ao conhecimento dos conceitos envolvidos e dos pré-requisitos, proporcionam um conjunto de ferramentas para a formulação e testagem de conjecturas. Utilizar as ferramentas computacionais para testar conjecturas é um "poupar tempo" para quem faz matemática uma vez que permite, rapidamente, pôr de parte ideias falsas. À medida que o computador simplifica os procedimentos algébricos e favorece a visualização gráfica, permite-nos ir mais longe, questionando e explorando para além do que já foi construído e apreendido.

O aparecimento de novos conceitos matemáticos e o encarar duma forma nova conceitos tradicionais poderão ser estimulados pela generalização das técnicas de cálculo, processa-

mento, armazenamento e escrita de informação pelos computadores. De facto, a tecnologia computacional tornou possível o estudo de questões que seriam totalmente inabordáveis apenas por processos tradicionais, estimulou nova investigação, e voltou a dar importância a questões já anteriormente estudadas mas entretanto negligenciadas. O computador tem, assim, todas as condições para exercer uma influência decisiva na evolução da Matemática como disciplina científica, proporcionando o desenvolvimento de certas áreas de investigação e conduzindo ao apagamento relativo de outras [20].

Sendo útil para o trabalho de investigação matemática é também útil ao aluno que quer aprender matemática. Contrariamente a uma imagem ainda prevalecente, a introdução de novas tecnologias no processo de ensino/aprendizagem não tem que se traduzir necessariamente num ensino cem por cento computadorizado. Pelo contrário, usado como ferramenta de trabalho ou como elemento de apoio à aprendizagem, ele poderá constituir mais um recurso propiciador de novas experiências e actividades, traduzindo-se num ensino mais rico e estimulante. A tecnologia computacional pode ajudar os educadores a captar a atenção dos alunos e a melhorar substancialmente o processo de aprendizagem pois: (i) acrescenta outra dimensão - visualização - na apresentação de conceitos matemáticos; (ii) oferece aos alunos uma maior flexibilidade para explorar e descobrir ideias próprias; (iii) torna acessíveis tópicos mais avançados.

Actualmente existem muitas aplicações e softwares matemáticos que a tecnologia computacional torna acessível para todos os níveis.

Um destes softwares é o **Maple**, que tem vindo a ser desenvolvido no Canadá desde 1981 pela *Waterloo Maple Inc.* e do qual existem, actualmente, várias versões.

O **Maple** faz parte de uma família de ambientes computacionais apelidados de Sistemas de Computação Algébrica. A computação algébrica, também chamada de computação simbólica, é uma área de investigação moderna, que surgiu na segunda metade do século XX. O **Maple** é uma ferramenta matemática muito poderosa que permite realizar uma miríade de cálculos simbólicos. Inclui um enorme número de comandos, disponíveis em vários *packages* (para consultar a lista dos *packages* existentes, executamos o comando `>?package`), os quais nos permitem trabalhar em áreas como: Cálculo, Cálculo das Variações, Álgebra Linear, Equações Diferenciais, Geometria, Lógica, Estatística, entre outras. Inclui também a sua própria linguagem de programação cuja sintaxe é semelhante à do Fortran, Pascal e C e permite, ao utilizador, definir os seus próprios procedimentos.

Ao longo desta dissertação iremos dedicar a nossa atenção a alguns princípios do cálculo variacional, apresentando alguns problemas que resolveremos pelos métodos variacionais em conjunto com o Maple 9.5.

O Cálculo das Variações é uma área clássica da Matemática cujo objectivo é solucionar problemas de optimalidade em espaços de funções, descrevendo as propriedades essenciais de tais soluções. Esta área nasceu no século dezassete; desenvolveu-se nos séculos dezoito

e dezanove; atingiu maturidade no século vinte; e continua extremamente activa em pleno século vinte e um. Desde o seu início o cálculo das variações tem sido aplicado a uma miríade de problemas físicos, matemáticos, económicos e sociais.

Desde a Antiguidade que o Homem se tem preocupado com a determinação de máximos e mínimos (em geral, com as soluções óptimas em certo sentido) para uma variedade de problemas de natureza geométrica ou física; mas só com os métodos da Análise Matemática desenvolvidos nos séculos XVII e XVIII se puderam atacar tais problemas de forma sistemática [1].

Do ponto de vista da matemática moderna, o cálculo das variações é parte da Análise Funcional e tem nela o mesmo papel que a teoria de máximos e mínimos de funções tem no cálculo elementar [23]. A diferença entre os cálculos diferencial e variacional é o domínio dos respectivos objectos a serem maximizados ou minimizados. Enquanto o cálculo diferencial procura números com propriedades optimizadoras, o cálculo variacional procura funções com propriedades optimizadoras.

Na sua essência o objectivo do cálculo das variações é encontrar um caminho, uma curva ou uma superfície, para os quais uma determinada funcional tem um valor mínimo ou máximo.

Os exemplos que se seguem são casos particulares do problema elementar do cálculo das variações: ¹

Qual é a curva que liga dois pontos no plano, de comprimento mínimo?

*Problema da Braquistócrona: Sendo A e B dois pontos num plano vertical, qual o caminho AMB que a partícula móvel M atravessa em tempo mínimo, assumindo que a sua aceleração é apenas devida à gravidade?*²

Qual é a superfície de revolução de área mínima que passa por dois pontos fixos, (x_a, y_a) e (x_b, y_b) ?

No cálculo das variações minimizamos/maximizamos funcionais do tipo integral. As funções integrandas dependem de funções desconhecidas e suas derivadas. Como exemplo, a funcional associada ao problema elementar tem a forma

$$J[y(\cdot)] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x)) dx.$$

Normalmente os problemas do cálculo das variações são resolvidos recorrendo à condição necessária de Euler-Lagrange (condição de optimalidade, primeiramente obtida por Euler e, mais tarde, novamente demonstrada por Lagrange, de modo mais rigoroso).

De um modo geral, a equação diferencial de Euler-Lagrange é uma equação não-linear, de segunda ordem (ou de ordem superior, quando os problemas variacionais envolvem derivadas

¹cf. §1.2, página 7.

²cf. §2.2, página 34.

de ordem superior a um), de difícil resolução analítica. Uma forma de as simplificar consiste em obter os primeiros integrais das referidas equações, isto é, funções que são constantes ao longo de todas as soluções da equação (no caso do problema da Braquistócrona, estudado no Capítulo 2, recorreremos ao "integral de energia").

O sistema de computação algébrica **Maple** revelar-se-á muito útil não só na determinação das equações de Euler-Lagrange mas também na resolução das mesmas.

No caso do problema da Braquistócrona, não é possível obter uma solução explícita satisfatória da equação de Euler-Lagrange. A extremal (solução da equação de Euler-Lagrange) para o problema da Braquistócrona, formulado matematicamente para dois pontos quaisquer $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$ do plano vertical, será determinada na forma paramétrica.

A solução deste problema mostrou que tal curva é um arco de cicloide, e não, como muitos pensavam, um segmento de recta.

O problema da Braquistócrona foi enunciado por Johann Bernoulli em 1696 e é considerado o embrião do Cálculo Variacional. Para além do problema clássico, muitas variantes do mesmo têm sido colocadas e resolvidas ao longo dos tempos.

Pretende-se com esta dissertação, explorar o sistema de computação algébrica **Maple 9.5**, identificando e ilustrando as suas potencialidades e fraquezas na área do Cálculo das Variações.

De notar que, ao usar uma versão anterior ou posterior à versão 9.5 do Maple, os resultados obtidos podem não aparecer de forma idêntica à aqui apresentada: alguns comandos do **Maple 9.5** não estão disponíveis em versões anteriores; em versões posteriores alguns comandos poderão ser alterados e serão certamente acrescentados comandos novos.

No primeiro capítulo apresentamos alguns conceitos básicos da teoria do Cálculo Variacional. Formulamos o problema elementar do cálculo das variações e dedicamos o nosso estudo essencialmente às condições necessárias de Euler-Lagrange, mostrando como o sistema de computação algébrica **Maple** pode ser muito útil na abordagem destas questões.

O segundo capítulo será dedicado ao problema clássico da Braquistócrona. Formulamos o problema para um caso geral e começamos por determinar a funcional integral para o caso da braquistócrona. Depois de apresentarmos a formulação matemática clássica do problema, resolvemo-lo usando a teoria do cálculo das variações em conjunto com o Maple. Exploramos ainda dois problemas concretos cujas soluções serão eficazmente obtidas recorrendo a este sistema de computação algébrica.

Finalmente, no terceiro capítulo, reformulamos o problema clássico da Braquistócrona restringindo a classe das funções admissíveis. Focaremos o nosso estudo essencialmente em dois sub problemas gerados por essa restrição.

Capítulo 1

Cálculo das Variações

1.1 Introdução

O Cálculo das Variações é uma área clássica da Matemática que estuda os métodos que nos permitem encontrar os valores máximos e mínimos de funcionais.

O Cálculo das Variações "nasce" por volta de 1696 com o problema da Braquistócrona. A partir daí, vários resultados foram encontrados por alguns dos maiores matemáticos dos últimos 300 anos, como por exemplo: Euler, Lagrange, Legendre, Bolza, Hamilton, Bliss, Weierstrass e Jacobi. O seu estudo foi muito importante não só para a Matemática, mas também para outras áreas, como por exemplo, Física, Engenharia, Biologia e Economia. A variedade e diversidade das aplicações práticas desta teoria é surpreendente.

Alguns matemáticos preferem as datas 1728 ou 1744 para o nascimento da teoria do cálculo das variações em vez de 1697 (data em que foi publicada a solução para o problema de Braquistócrona). Em 1728, Leonard Euler (1707-1783) tinha já escrito *Acerca de encontrar equações para curvas geodésicas* e em 1744 publicou o seu livro de referência *Método para descobrir linhas curvas que gozam da propriedade de máximo e mínimo, ou a solução do problema isoperimétrico tomada no sentido mais amplo possível* [23].

Euler desenvolveu um método para resolver problemas específicos e sistematizou-o num instrumento poderoso. Com este novo método ele foi capaz de estudar uma classe bastante generalizada de problemas. Na sua publicação de 1744, mostrou a primeira condição necessária para mínimo, a agora chamada *condição necessária de Euler-Lagrange*.¹

Apesar de ser verdade que pouco tempo depois a técnica de Euler foi superada pela de Lagrange, naquela época tudo isto era matemática completamente inovadora. Em 1755, Jean Louis Lagrange (1736-1813) enviou a Euler uma carta que mostrava como ele podia eliminar os métodos geométricos enfadonhos do seu processo. Depois de considerar o método de Lagrange, Euler converteu-se instantaneamente, abandonou os seus antigos métodos geométricos

¹Cf. §1.3 , Teorema 1.3.1.

e baptizou toda esta teoria pelo nome que agora utilizamos, o *Cálculo das Variações*, em honra ao método variacional de Lagrange.

Em 1786, Adrien Marie Legendre (1752-1833) apresentou uma dissertação à Academia de Paris intitulada *Sobre o método de distinguir máximos de mínimos no cálculo das variações*. Legendre considerou o problema de determinar se uma extremal é um arco minimizante ou maximizante. Analisou a segunda variação de uma funcional, motivado pelo Teorema de Taylor. Legendre foi capaz de mostrar a condição necessária de segunda ordem $\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} \geq 0$ ao longo da curva minimizante e $\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} \leq 0$ ao longo da curva maximizante; o que é surpreendentemente semelhante ao que conhecemos do cálculo elementar para o teste da segunda derivada.

Só passados cinquenta anos desde a descoberta inicial de Legendre, relativa à condição necessária da segunda variação, é que outro matemático se debruçou na tarefa de desenvolver esta teoria na direcção das condições suficientes.

No início dos anos 1870, Karl Weierstrass (1815-1897) deu à teoria do cálculo das variações uma revisão completa. Levou bastante tempo até estes resultados se tornarem amplamente conhecidos pelo resto da comunidade matemática.

Com o cálculo das variações numa posição estável e firme, ajudado pelo trabalho rigoroso da escola de Weierstrass, tudo estava preparado para a teoria se desenvolver ainda mais no decorrer do século vinte. Com base no trabalho realizado por Weierstrass, Oskar Bolza (1875-1942) e Gilbert Bliss (1876-1951) deram ao cálculo das variações uma estrutura matemática rigorosa.

Em pleno século vinte e um, o cálculo das variações continua extremamente activo.

Neste capítulo vamos trabalhar com o package **VariationCalculus** do **Maple 9.5**. Este package proporciona um conjunto de funções para a resolução de problemas do Cálculo das Variações.

Tendo em conta que a resolução dos problemas variacionais passa quase obrigatoriamente pela resolução das equações diferenciais de Euler-Lagrange, o nosso estudo ao longo deste capítulo será dedicado à função **EulerLagrange**, do **Maple**, disponível no referido package.

Serão estudados vários problemas por aplicação da condição necessária de optimalidade de Euler-Lagrange, sendo sempre feita uma análise recorrendo ao sistema de computação algébrica **Maple**.

Começaremos por em §1.2 formular o problema elementar do cálculo das variações.

Em §1.3 apresentaremos a equação de Euler-Lagrange que fornece uma condição necessária de optimalidade de uma dada funcional [24], [15].

De seguida, em §1.3.1, apresentaremos cinco casos de integrabilidade da equação de Euler-

Lagrange.

Em §1.4 faremos uma pequena abordagem sobre o problema isoperimétrico uma vez que o método utilizado para resolver este tipo de problemas será útil para melhor compreender a resolução apresentada para o problema considerado no exemplo 1.5.2, na secção §1.5.2.

Em §1.5.1 e §1.5.2 abordaremos duas extensões do problema elementar do cálculo das variações. Apresentaremos dois exemplos: um que envolve uma funcional que depende de duas funções; outro que envolve uma funcional que depende de derivadas de ordem dois.

1.2 Problema Elementar do Cálculo das Variações

O problema elementar do cálculo das variações consiste na determinação de um extremante - um minimizante ou um maximizante - para uma funcional integral que depende da escolha de uma função pertencente a uma determinada classe de funções, em particular funções cujos valores nos extremos de um dado intervalo real fechado são fixos.

Problema 1.2.1. Sejam $a, b, a < b, A, B$ números reais e $L : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Considera-se o problema seguinte

$$J[x(\cdot)] = \int_a^b L(t, x(t), x'(t)) dt \rightarrow \min, \quad x(a) = A, \quad x(b) = B, \quad (1.2.1)$$

onde o mínimo se procura no conjunto das funções duas vezes continuamente diferenciáveis no intervalo $[a, b]$: $C^2([a, b])$. A este problema dá-se o nome de Problema Elementar do Cálculo das Variações.

Definição 1.2.2. À função L chamamos *Lagrangeano* do problema elementar do cálculo das variações.

Definição 1.2.3. Diz-se que a função $\tilde{x}(\cdot) \in C^2([a, b])$ dá um *mínimo fraco local* à funcional J (1.2.1) se existe $\epsilon > 0$ tal que $J[\tilde{x}(\cdot)] \leq J[x(\cdot)]$ sempre que $x(\cdot) \in C^2([a, b])$, $x(a) = A$, $x(b) = B$ e $\max_{t \in [a, b]} |x(t) - \tilde{x}(t)| + \max_{t \in [a, b]} |x'(t) - \tilde{x}'(t)| < \epsilon$.

1.3 Equação de Euler-Lagrange

O teorema que se segue dá uma condição necessária de mínimo fraco local.

Teorema 1.3.1. *Seja $x(\cdot) \in C^2([a, b])$ tal que $J[x(\cdot)] = \int_a^b L(t, x(t), x'(t)) dt$ é mínimo. Então $x(\cdot)$ verifica a equação de Euler-Lagrange:*

$$\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), x'(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'}(t, x(t), x'(t)) = 0 \quad (1.3.1)$$

Demonstração. Vide e.g. [24, pp. 64-65]. □

Definição 1.3.2. Às soluções das equações de Euler-Lagrange (1.3.1) dá-se o nome de *extremais*.

Desenvolvendo a derivada total da equação de Euler-Lagrange obtemos,

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial x'} - \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial x'} x' - \frac{\partial^2 L}{\partial x' \partial x'} x'' = 0.$$

A equação de Euler-Lagrange é, em geral, uma equação diferencial de segunda ordem, não linear e de difícil resolução.

Se a equação de Euler-Lagrange for uma equação diferencial de segunda ordem, a solução geral da equação $x(t, c_1, c_2)$ contém duas constantes arbitrárias que são determinadas utilizando as condições de fronteira: $x(a) = A$ e $x(b) = B$.

O problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'} &= 0, \\ x(a) &= A, \quad x(b) = B \end{aligned}$$

nem sempre tem solução (nesse caso concluímos que (1.2.1) não tem solução) e, se a solução existe, pode não ser única (vários candidatos a minimizante).

Exemplo 1.3.3. Encontrar a extremal de Euler-Lagrange $\tilde{x}(\cdot)$ associada à funcional

$$J[x(\cdot)] = \int_{-1}^0 (12tx(t) - (x'(t))^2) dt$$

quando sujeita às condições de fronteira

$$x(-1) = 1 \quad e \quad x(0) = 0. \tag{1.3.2}$$

Neste caso $L(t, x, x') = 12tx - (x')^2$ e a equação de Euler-Lagrange toma a forma:

$$12t - \frac{d}{dt}(-2x'(t)) = 0 \Leftrightarrow 12t + 2x''(t) = 0$$

É muito fácil resolver a equação diferencial anterior que, sujeita às condições (1.3.2), nos conduz à extremal

$$\tilde{x}(t) = -t^3$$

De notar que a função $\tilde{x}(\cdot)$ encontrada é apenas uma extremal, isto é, um candidato a minimizante ou maximizante. É para esta extremal que a funcional em apreço poderá, eventualmente, assumir um extremo.

Como já foi referido, o package `VariationalCalculus` do `Maple 9.5` proporciona um conjunto de comandos para a resolução de problemas do Cálculo das Variações. Para utilizar este package temos de o "carregar", executando o seguinte comando:

```
>with(VariationalCalculus):
```

Neste package temos disponível a função,

```
EulerLagrange(L,t,x(t))
```

que devolve um conjunto com as equações de Euler-Lagrange para uma funcional do tipo (1.2.1). L representa o Lagrangeano, t a variável independente e $x(t)$ uma função desconhecida ou uma lista de funções. Esta função do Maple permite lidar com funcionais com mais de uma variável dependente.

Os comandos

```
dsolve({ODE,ICs},x(t))
```

e

```
dsolve({sysODE,ICs},{funcs})
```

permitem resolver equações diferenciais e sistemas de equações diferenciais, respectivamente. ODE e $sysODE$ representam a equação diferencial ordinária e o conjunto com um sistema de equações diferenciais ordinárias, respectivamente; ICs representa as condições iniciais; $x(t)$ e $funcs$ representam a função (de uma variável) a determinar e o conjunto de funções a determinar, respectivamente.

O comando `diff(a,x1,x2,...,xn)` devolve a derivada parcial da expressão a em ordem a x_1, x_2, \dots, x_n , respectivamente.

Segue então uma análise do problema apresentado no exemplo 1.3.3, feita no sistema de computação algébrica Maple. Começamos por carregar o package em memória e por definir o Lagrangeano L .

```
>with(VariationalCalculus):
```

```
>L:=(12*t*x(t)-diff(x(t),t)^2);
```

$$L := 12tx(t) - \left(\frac{d}{dt}x(t) \right)^2$$

As respectivas equações de Euler-Lagrange são facilmente obtidas por intermédio do Maple: Utilizando o comando `EulerLagrange` obtemos um conjunto que contém a equação de Euler-Lagrange

```
>eqEL:=EulerLagrange(L,t,x(t));
```

$$eqEL := \left\{ 12t + 2 \frac{d^2}{dt^2} x(t) \right\}$$

De notar que, por defeito, quando o segundo membro da equação é 0, o **Maple** devolve a equação sob a forma de expressão.

As extremas são obtidas resolvendo esta equação diferencial com as condições iniciais dadas. Recorremos ao comando Maple **dsolve**:

```
>dsolve({op(eqEL), x(-1)=1, x(0)=0}, x(t));
```

$$x(t) = -t^3$$

O comando **op** foi utilizado para extrair o elemento do conjunto *eqEL*.

1.3.1 Alguns Casos de Integrabilidade da Equação de Euler-Lagrange

Em alguns casos particulares a equação de Euler-Lagrange admite *integrais*, isto é, funções $\Phi(t, x(t), x'(t))$ que são constantes ao longo de todas as soluções $x(t)$, $t \in [a, b]$, da equação de Euler-Lagrange. Isto dá a possibilidade de procurar a solução da equação diferencial $\Phi(t, x(t), x'(t)) = \text{const}$, permitindo, desta forma, reduzir a ordem da equação e assim simplificar o problema.

Tal como Krasnov, [12], consideramos os seguintes cinco casos:

1º Caso: A função L não depende de $x'(t)$, isto é, $L = L(t, x(t))$. Então a equação de Euler-Lagrange (1.3.1) reduz-se neste caso a:

$$\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t)) = 0.$$

Como esta equação não depende de constantes indeterminadas, será compatível com as condições de fronteira $x(a) = A$ e $x(b) = B$, apenas em casos excepcionais.

Recorrendo ao sistema de computação algébrica **Maple**, ao aplicarmos a função **EulerLagrange** ao Lagrangeano $L(t, x(t))$, obtemos a equação anterior.

```
>EulerLagrange(L(t,x(t)),t,x(t));
```

$$\{D_2(L)(t, x(t))\}$$

Em **Maple**, o operador **D** representa o operador diferencial. Por intermédio do comando **D(L)** obtemos a derivada da função L . Se L for uma função de n argumentos, **D[i](L)** devolve a derivada parcial de L em ordem ao i -ésimo argumento. Então, $D_2(L)(t, x(t))$ representa a derivada parcial de L em ordem a x (em ordem ao segundo argumento) no ponto $(t, x(t))$.

Exemplo 1.3.4. Determinar as extremais da funcional

$$J[x(t)] = \int_1^3 (3t - x(t))x(t)dt$$

sujeitas às condições de fronteira $x(1) = 1$ e $x(3) = 9$.

Recorrendo ao sistema de computação algébrica **Maple**:

```
>g:=(3*t-x(t))*x(t);
```

$$g := (3t - x(t))x(t)$$

```
>eqEL:=EulerLagrange(g,t,x(t));
```

$$eqEL := \{-2x(t) + 3t\}$$

Como esta equação não é diferencial, vamos resolvê-la usando o comando **solve**.

```
>sol:=solve({op(eqEL)}, {x(t)});
```

$$sol := \left\{ x(t) = \frac{3}{2}t \right\}$$

```
>subs(t=1,sol);
```

$$\left\{ x(1) = \frac{3}{2} \right\}$$

A extremal $x(t) = \frac{3}{2}t$ não satisfaz a condição de fronteira $x(1) = 1$, logo este problema variacional não tem solução.

2º Caso: A função L é linear em relação a $x'(t)$, isto é, $L(t, x(t), x'(t)) = M(t, x(t)) + N(t, x(t))x'(t)$. A equação de Euler-Lagrange será então da forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial x} x' - \frac{d}{dt}(N) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial x}(t, x(t)) - \frac{\partial N}{\partial t}(t, x(t)) &= 0, \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

isto é, uma equação não diferencial que fornece, como no caso precedente, uma relação que só excepcionalmente satisfará as condições de fronteira.

Através do **Maple**:

```
>L:=M(t,x(t))+N(t,x(t))*diff(x(t),t);
```

$$L := M(t, x(t)) + N(t, x(t)) \frac{d}{dt} x(t)$$

```
>eqEL:=EulerLagrange(L,t,x(t));
```

$$eqEL := \{D_2(M)(t, x(t)) - D_1(N)(t, x(t))\}.$$

A equação devolvida pelo **Maple** é equivalente à equação (1.3.3). Se a tentarmos resolver através do comando **dsolve** (resolve equações diferenciais ordinárias) é-nos devolvida uma mensagem de erro uma vez que se trata de uma equação não diferencial.

```
>dsolve(eqEL,x(t));
```

$$Error, (in ODEtools/info) Not an ODE w.r.t. x(t)$$

Como vimos no Exemplo 1.3.4, devemos recorrer não ao comando **dsolve** do **Maple** mas sim ao comando **solve**.

Exemplo 1.3.5. Determinar, para a funcional

$$J[x(t)] = \int_0^1 (e^{x(t)} + tx'(t)) dt,$$

as extremas sujeitas às condições de fronteira $x(0) = 0$ e $x(1) = \alpha$, $\alpha > 0$.

O Lagrangeano é da forma $M(t, x(t)) + N(t, x(t))x'(t)$, com $M(t, x) = e^x$ e $N(t, x) = t$. Sendo $\frac{\partial M}{\partial x} = e^x$ e $\frac{\partial N}{\partial t} = 1$, então a equação de Euler-Lagrange reduz-se, neste caso, a

$$e^{x(t)} - 1 = 0$$

Recorrendo ao **Maple**,

```
>eqEL:=EulerLagrange(exp(x(t))+t*diff(x(t),t),t,x(t));
```

$$eqEL := \{e^{x(t)} - 1\}$$

```
>solve(eqEL,x(t));
```

$$\{x(t) = 0\}$$

A extremal $x(t) = 0$ não satisfaz a condição de fronteira $x(1) = \alpha$ ($\alpha \neq 0$), logo este problema variacional não tem solução.

3º Caso: A função L não depende explicitamente de $x(t)$, isto é, $L = L(t, x'(t))$. Então $\frac{\partial L}{\partial x}(t, x'(t)) = 0$ e a equação de Euler-Lagrange tem a forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial x'}(t, x'(t)) \right) = 0 \quad (1.3.4)$$

pelo que admite o *integral de momento*

$$\frac{\partial L}{\partial x'}(t, x'(t)) = \text{const} \quad (1.3.5)$$

Ao aplicar o comando **EulerLagrange** a uma função $L(t, x'(t))$ verificamos que o **Maple** devolve a equação de Euler-Lagrange e o integral de momento, descritos acima. De notar que, nas equações dos integrais de momento e dos integrais de energia (este últimos serão abordados no quarto caso, página 17), as variáveis, K_i , devolvidas representam constantes de integração arbitrárias.

`>EulerLagrange(L(t,diff(x(t),t)),t,x(t));`

$$\left\{ - (D_{1,2})(L) \left(t, \frac{d}{dt}x(t) \right) - (D_{2,2})(L) \left(t, \frac{d}{dt}x(t) \right) \frac{d^2}{dt^2}x(t), D_2(L) \left(t, \frac{d}{dt}x(t) \right) = K_1 \right\}$$

Na nossa notação,

$$(D_{1,2})(L) \left(t, \frac{d}{dt}x(t) \right) + (D_{2,2})(L) \left(t, \frac{d}{dt}x(t) \right) \frac{d^2}{dt^2}x(t) = 0$$

é equivalente a escrevermos

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial x'}(t, x'(t)) + \frac{\partial^2 L}{\partial x'^2}(t, x'(t))x''(t) = 0$$

que é a forma desenvolvida da equação (1.3.4).

$D_2(L) \left(t, \frac{d}{dt}x(t) \right) = K_1$ é o integral de momento (1.3.5).

Exemplo 1.3.6. Determinar as extremas da funcional

$$J[x(t)] = \int_1^2 x'(t)(1 + t^2 x'(t)) dt$$

sujeitas às condições $x(1) = 3$ e $x(2) = 5$.

O comando **EulerLagrange** devolve um conjunto, neste caso, com dois elementos. Tendo em conta que num conjunto não importa a ordem de ocorrência dos elementos, não devemos assumir que os conjuntos devolvidos pelo **Maple** obedeçam ou mantenham determinada ordem. De maneira a identificarmos de imediato a ordem dos elementos devolvidos podemos, através do comando **convert**, obter uma lista - uma sequência ordenada de elementos entre parênteses rectos:

```
>eqEL:=convert(EulerLagrange(diff(x(t),t)*(1+t^2*diff(x(t),t)),t,x(t)),list);
```

$$eqEL := \left[-4t \frac{d}{dt} x(t) - 2t^2 \frac{d^2}{dt^2} x(t), 1 + 2t^2 \frac{d}{dt} x(t) = K_1 \right]$$

O Maple devolveu uma lista. O primeiro elemento da lista é a equação de Euler-Lagrange abaixo designada por `eqEL[1]`; o segundo elemento é o integral de momento, abaixo designado por `eqEL[2]`. Aplicando o comando `dsolve` à equação de Euler-Lagrange encontramos facilmente a extremal.

```
>dsolve({eqEL[1],x(1)=3,x(2)=5},x(t));
```

$$x(t) = 7 - 4 \frac{1}{t}$$

Aplicando o comando `dsolve` ao integral de momento, nada é devolvido.

```
>dsolve({eqEL[2],x(1)=3,x(2)=5},x(t));
```

O Maple fica provavelmente "baralhado" a avaliar e a determinar as constantes. Em vez de introduzir as condições iniciais no comando `dsolve`, vamos avaliá-las mais tarde.

```
>sol:=dsolve(eqEL[2],x(t));
```

$$sol := x(t) = -\frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} K_1}{t} + _C1$$

Substituindo os valores de t e $x(t)$, respeitantes às condições iniciais, na solução geral, sol , obtemos duas equações com duas incógnitas.

```
>sol1:=subs({x(t)=3,t=1},sol);
```

$$sol_1 := 3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} K_1 + _C1$$

```
>sol2:=subs({x(t)=5,t=2},sol);
```

$$sol_2 := 5 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} K_1 + _C1$$

Resolvemos o sistema de equações por intermédio do comando `solve`.

```
>const:=solve({sol1,sol2},{K[1],_C1});
```

$$const := \{ _C1 = 7, K_1 = 9 \}$$

Finalmente, substituímos o valor das constantes na solução geral, sol , e obtemos a extremal pretendida.

```
>subs({op(const)},sol);
```

$$x(t) = 7 - 4 \frac{1}{t}$$

Notamos que se derivarmos em ordem a t o integral de momento obtemos a equação de Euler-Lagrange. Para vermos isto com o **Maple** utilizamos o comando **diff**

```
>diff(eqEL[2],t);
```

$$4t \frac{d}{dt} x(t) + 2t^2 \frac{d^2}{dt^2} x(t) = 0$$

Podemos dizer que do ponto de vista matemático a dificuldade de determinar as extremas por intermédio da equação de Euler-Lagrange ou do integral é a mesma, mas do ponto de vista do **Maple** não: embora equivalentes, o **Maple** não resolve da mesma forma a equação de Euler-Lagrange e o integral de momento. Embora o processo utilizando o integral de momento envolva mais cálculos, obtivemos, como esperado, a mesma solução.

Exemplo 1.3.7. Determinar as extremas da funcional

$$J[x(t)] = \int_1^2 \sqrt{\frac{1 + x'(t)^2}{t}} dt$$

sujeitas às condições $x(1) = 0$ e $x(2) = 1$.

```
>eqEL:=convert(EulerLagrange(sqrt(1+diff(x(t),t)^2)/t,t,x(t)),list);
```

$$eqEL := \left[\frac{\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2 \frac{d^2}{dt^2}x(t)}{\left(1 + \left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}t} + \frac{\frac{d}{dt}x(t)}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2t^2}} - \frac{\frac{d^2}{dt^2}x(t)}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2t}}, \frac{\frac{d}{dt}x(t)}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2t}} = K_1 \right]$$

```
>dsolve({eqEL[1],x(1)=0,x(2)=1},{x(t)});
```

$$x(t) = -\sqrt{-t^2 + 5} + 2$$

Aplicando o comando **dsolve** à equação de Euler-Lagrange encontrámos facilmente a extremal. Recorrendo ao integral de momento,

```
>sol:=dsolve(eqEL[2],x(t));
```

```
>sol1:=subs({x(t)=0,t=1},sol):
```

```
>sol2:=subs({x(t)=1,t=2},sol):
```

```
>const:=solve({sol1,sol2},{K[1],_C1});
```

$$const := \{-C_1 = 2, K_1 = \text{RootOf}(5Z^2 - 1, 0.4472135955)\}$$

Vamos converter estas soluções expressas como "RootOf", na forma de radical. Passamos então a ter o conjunto de soluções *const1*.

```
>const1:=seq(convert(const[i],radical),i=1..2);
```

$$const_1 := \left\{ K_1 = \frac{1}{5}\sqrt{5}, -C_1 = 2 \right\}$$

```
>simplify(subs(const1,sol));
```

$$x(t) = \sqrt{-(t^2 - 5)^{-1}t^2} - 5\sqrt{-(t^2 - 5)^{-1}} + 2$$

Esta extremal tem um aspecto diferente da extremal obtida acima. No entanto, para os valores em que t está definido neste problema ($1 \leq t \leq 2$) verificamos que as extremais são equivalentes.

```
>x1:=-(t^2+5)^(1/2)+2;
```

$$x_1 := -\sqrt{-t^2 + 5} + 2$$

```
>x2:=(-1/(t^2-5))^(1/2)*t^2-5*(-1/(t^2-5))^(1/2)+2;
```

$$x_2 := \sqrt{-(t^2 - 5)^{-1}t^2} - 5\sqrt{-(t^2 - 5)^{-1}} + 2$$

```
>simplify(x1-x2) assuming t>=1 and t<=2;
```

0

Exemplo 1.3.8. (Problema sem solução)

Determinar as extremais da funcional

$$J[x(t)] = \int_0^1 t^2 x'(t)^2 dt$$

sujeitas às condições $x(0) = 0$ e $x(1) = 1$.

```
>L:=t^2*diff(x(t),t)^2:
```

```
>eqEL:=convert(EulerLagrange(L,t,x(t)),list);
```

$$eqEL := \left[-4t \frac{d}{dt} x(t) - 2t^2 \frac{d^2}{dt^2} x(t), 2t^2 \frac{d}{dt} x(t) = K_1 \right]$$

`>dsolve({eqEL[1],x(0)=0,x(1)=1},{x(t)});`

Aplicando o comando `dsolve` à equação de Euler-Lagrange, introduzindo as condições de fronteira verificamos que nada é devolvido. Optando por avaliar as condições de fronteira num passo seguinte, obtemos uma solução geral, $x(t)$:

`>sol:=dsolve(eqEL[1],x(t));`

$$sol := x(t) = -C_1 + \frac{-C_2}{t}$$

Concluimos que esta extremal não satisfaz a condição $x(0) = 0$, logo este problema não tem solução.

4º Caso: A função L não depende explicitamente de t , isto é, $L = L(x(t), x'(t))$. Ao multiplicarmos a equação de Euler-Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x}(x(t), x'(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial x'}(x(t), x'(t)) \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial x}(x(t), x'(t)) - x'(t) \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial x'}(x(t), x'(t)) - x''(t) \frac{\partial^2 L}{\partial x' \partial x'}(x(t), x'(t)) &= 0 \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

por $x'(t)$, obtemos

$$\frac{d}{dt} \left(L(x(t), x'(t)) - x'(t) \frac{\partial L}{\partial x'}(x(t), x'(t)) \right) = 0$$

A equação de Euler-Lagrange admite então o *integral de energia*

$$L(x(t), x'(t)) - x'(t) \frac{\partial L}{\partial x'}(x(t), x'(t)) = const \quad (1.3.7)$$

Recorrendo ao sistema de computação algébrica **Maple**, aplicando a função **EulerLagrange** ao Lagrangeano $L(x(t), x'(t))$ obtemos:

`>EulerLagrange(L(x(t),diff(x(t),t)),t,x(t));`

$$\left\{ D_1(L) \left(x(t), \frac{d}{dt} x(t) \right) - (D_{1,2})(L) \left(x(t), \frac{d}{dt} x(t) \right) \frac{d}{dt} x(t) - (D_{2,2})(L) \left(x(t), \frac{d}{dt} x(t) \right) \frac{d^2}{dt^2} x(t), \right. \\ \left. L \left(x(t), \frac{d}{dt} x(t) \right) - \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) D_2(L) \left(x(t), \frac{d}{dt} x(t) \right) = K_1 \right\}$$

onde

$$D_1(L) \left(x(t), \frac{d}{dt} x(t) \right) - (D_{1,2})(L) \left(x(t), \frac{d}{dt} x(t) \right) \frac{d}{dt} x(t) - (D_{2,2})(L) \left(x(t), \frac{d}{dt} x(t) \right) \frac{d^2}{dt^2} x(t)$$

representa a equação de Euler-Lagrange (1.3.6) e

$$L\left(x(t), \frac{d}{dt}x(t)\right) - \left(\frac{d}{dt}x(t)\right) D_2(L)\left(x(t), \frac{d}{dt}x(t)\right) = K_1$$

representa o integral de energia (1.3.7).

Exemplo 1.3.9. Determinar as extremas da funcional

$$J[x(t)] = \int_0^1 x'(t)x^2(t) + x'(t)^2x(t)dt$$

sujeitas às condições $x(0) = 1$ e $x(1) = 4$.

```
>L:=diff(x(t),t)*x(t)^2+diff(x(t),t)^2*x(t);
```

$$L := \left(\frac{d}{dt}x(t)\right)(x(t))^2 + \left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2x(t)$$

```
>eqEL:=convert(EulerLagrange(L,t,x(t)),list);
```

$$eqEL := \left[-\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2 - 2\left(\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right)x(t), \left(\frac{d}{dt}x(t)\right)(x(t))^2 + \left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2x(t) - \left(\frac{d}{dt}x(t)\right)\left((x(t))^2 + 2\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)x(t)\right) = K_1 \right]$$

```
>dsolve({eqEL[1],x(0)=1,x(1)=4},x(t));
```

$$x(t) = (7t + 1)^{\frac{2}{3}} \quad (1.3.8)$$

Utilizando agora o integral de energia:

```
>simplify(eqEL[2]);
```

$$-\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2x(t) = K_1$$

```
>sol:=dsolve(eqEL[2],x(t)):
```

O comando `dsolve` devolve, neste caso, seis soluções: quatro são imaginárias, logo não são consideradas; as restantes verificamos, através do procedimento seguinte, que são iguais.

```
>sol[1];
```

$$x(t) = -\frac{1}{4} \frac{(12tK_1^2 - 12_C_1 K_1^2)^{\frac{2}{3}}}{K_1}$$

```
>sol[4];
```

$$x(t) = -\frac{1}{4} \frac{(-12tK_1^2 + 12_C_1 K_1^2)^{\frac{2}{3}}}{K_1}$$

```
>simplify(rhs(sol[1])^3-rhs(sol[4])^3);
```

0

Consideramos apenas uma delas, por exemplo `sol[1]`, e resolvendo pelo processo já anteriormente aplicado,

```
>eq1:=subs({x(t)=1,t=0},sol[1]);
```

$$eq1 := 1 = -\frac{1}{4} \frac{(-12_C_1 K_1^2)^{\frac{2}{3}}}{K_1}$$

```
>eq2:=subs({x(t)=4,t=1},sol[1]);
```

$$eq2 := 4 = -\frac{1}{4} \frac{(12 K_1^2 - 12_C_1 K_1^2)^{\frac{2}{3}}}{K_1}$$

Executando o comando `solve`, imediatamente abaixo, nada nos é devolvido. Obteremos apenas uma solução aproximada para o problema pois, ao recorrermos, alternativamente, ao comando `fsolve`, serão atribuídos valores decimais às constantes $_C_1$ e K_1 .

```
>const:=solve({eq1,eq2},{K[1],\_C1});
```

const :=

```
>const:=fsolve({eq1,eq2},{K[1],\_C1});
```

const := { $K_1 = -21.77777778$, $_C_1 = -0.1428571429$ }

```
>subs(const,sol[1]);
```

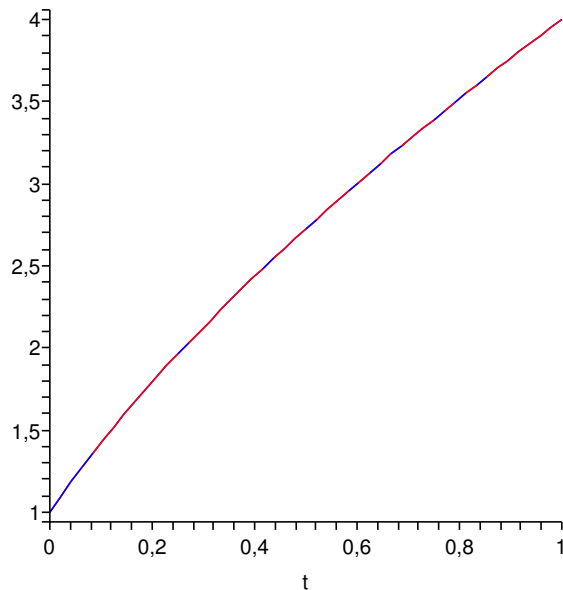
$$x(t) = 0.01147959184 (5691.259260t + 813.0370374)^{\frac{2}{3}} \quad (1.3.9)$$

Verificamos facilmente recorrendo ao comando `plot` do `Maple` que (1.3.8) e (1.3.9) representam a mesma função.

```

>x1:=(7*t+1)^(2/3):
>x2:=0.1147959184e-1*(5691.259260*t+813.0370374)^(2/3):
>plot([x1,x2],t=0..1,color=[blue,red]);

```



5º Caso: A função L depende apenas de $x'(t)$, isto é, $L = L(x'(t))$. Então a equação de Euler-Lagrange reduz-se a

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x' \partial x'} x'' = 0 \quad (1.3.10)$$

e as extremas serão as rectas

$$x = c_1 t + c_2$$

para quaisquer números c_1 e c_2 .

Se aplicamos o comando `EulerLagrange` a uma função $L(x'(t))$, definida em Maple por

```

>L(diff(x(t),t)):
>eqEL:=convert(EulerLagrange(L(diff(x(t),t)),t,x(t)),list);

```

$$eqEL := \left[- \left(D^{(2)} \right) (L) \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) \frac{d^2}{dt^2} x(t), D(L) \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) = K_1, \right. \\ \left. L \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) - \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) D(L) \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) = K_2 \right]$$

este, além da equação de Euler-Lagrange,

$$\left(D^{(2)}\right)(L)\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)\frac{d^2}{dt^2}x(t)=0$$

devolve ainda:

i) $D(L)\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)=K_1$, isto é, o integral de momento $\frac{\partial L}{\partial x'}(x'(t))=K_1$, pois a função L não depende explicitamente de $x(t)$,

ii) $L\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)-\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)D(L)\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)=K_2$, isto é, o integral de energia $L(x'(t))-x'(t)\frac{\partial L}{\partial x'}(x'(t))=K_2$, pois a função não depende explicitamente de t .

Ao aplicarmos o comando `dsolve` à equação diferencial de Euler-Lagrange, com as condições de fronteira arbitrárias $x(a)=A$ e $x(b)=B$, obtemos a recta que passa pelos pontos (a,A) e (b,B)

```
>dsolve({eqEL[1],x(a)=A,x(b)=B},x(t));
```

$$x(t)=\frac{(-B+A)t}{-b+a}+\frac{-Ab+aB}{-b+a}$$

Exemplo 1.3.10. Determinar as extremas da funcional

$$J[x(t)]=\int_a^b\sqrt{1+x'(t)^2}dt$$

$$x(a)=A, \quad x(b)=B$$

Este problema equivale ao estabelecimento do caminho mais curto entre os pontos (a,A) e (b,B) .

```
>f:=sqrt(1+diff(x(t),t)^2):
```

```
>eqEL:=convert(EulerLagrange(f,t,x(t)),list);
```

$$eqEL:=\left[\frac{\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2\frac{d^2}{dt^2}x(t)}{\left(1+\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2\right)^{3/2}}-\frac{\frac{d^2}{dt^2}x(t)}{\sqrt{1+\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2}},\frac{\frac{d}{dt}x(t)}{\sqrt{1+\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2}}=K_1,\right. \\ \left.\sqrt{1+\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2}-\frac{\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2}{\sqrt{1+\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2}}=K_2\right]$$

A extremal será, como esperado, a recta que passa por esses pontos.

```
>dsolve({eqEL[1],x(a)=A,x(b)=B},x(t));
```

$$x(t) = \frac{(A-B)t}{a-b} + \frac{Ba-bA}{a-b}$$

Exemplo 1.3.11. Determinar as extremas da funcional

$$\int_0^1 (x'(t)^3 - x'(t)^2) dt$$

sujeitas às condições $x(0) = 0$ e $x(1) = 1$.

Obtemos a equação de Euler-Lagrange e os integrais de energia e de momento por intermédio da função `EulerLagrange`

```
>eqEL:=convert(EulerLagrange(diff(x(t),t)^3-diff(x(t),t)^2,t,x(t)),list);
```

$$eqEL := \left[-6 \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) \frac{d^2}{dt^2} x(t) + 2 \frac{d^2}{dt^2} x(t), 3 \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 - 2 \frac{d}{dt} x(t) = K_1, \right. \\ \left. \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^3 - \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 - \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) \left(3 \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 - 2 \frac{d}{dt} x(t) \right) = K_2 \right]$$

Aplicando o comando `dsolve` à equação de Euler-Lagrange obtemos facilmente a extremal pretendida

```
>dsolve({eqEL[1],x(0)=0,x(1)=1},x(t));
```

$$x(t) = t$$

1.4 Problema Isoperimétrico

O primeiro problema deste tipo parece ter sido resolvido, na prática, pela princesa fenícia Dido.

Dido, depois do marido ter sido morto, fugiu para a África Mediterrânica, onde comprou, de um rei ingénuo, todo o terreno *que pudesse ser incluído pela pele de um boi*. Depois de cortar a pele em tiras bem finas e amarrar as pontas umas às outras, ela encerrou uma parcela de terreno que veio a tornar-se na cidade-estado de Cartago [26]. O "problema de Dido" pode ser colocado como se segue:

Concedida uma porção da costa de África como fronteira, qual a maior área que pode ser incluída pelo perímetro dado que permanece?

Considerando-se a costa como um segmento de recta $[a, b]$ e o interior da área como sendo circunscrito pelo gráfico da função $y(\cdot)$, $y(x) \geq 0$ e $y(a) = 0 = y(b)$, obtemos o seguinte problema: maximizar a área

$$J = \int_a^b y(x) dx$$

sujeita à restrição do perímetro

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = \gamma.$$

A solução é um arco de circunferência de comprimento γ e que passa por a e b .

De facto, nos trabalhos dos cientistas da Grécia Antiga encontra-se a afirmação que de entre todas as figuras isoperimétricas, isto é, as que têm o mesmo perímetro, o círculo tem área máxima.

O problema de Dido pertence à seguinte classe de problemas:

Problema 1.4.1 (Problema Isoperimétrico). Encontrar o minimizante (ou maximizante) da funcional

$$F[y(\cdot)] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx$$

onde as funções $y(\cdot) \in C^2$ devem satisfazer não só as condições de fronteira

$$y(a) = A, \quad y(b) = B,$$

como também a restrição isoperimétrica

$$G[y(\cdot)] = \int_a^b g(x, y(x), y'(x)) dx = \xi,$$

com ξ um número dado.

Teorema 1.4.2. *Seja $y(\cdot) \in C^2$ um minimizante local para o problema isoperimétrico 1.4.1, que não é extremal da funcional $G[\cdot]$. Então existe um número real λ tal que $y(\cdot)$ é extremal de Euler-Lagrange do problema elementar do Cálculo das Variações.*

$$J[y(\cdot)] = F[y(\cdot)] + \lambda G[y(\cdot)] = \int_a^b [f(x, y(x), y'(x)) + \lambda g(x, y(x), y'(x))] dx \rightarrow \min,$$

$$y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

Demonstração. Vide e.g. [26, pp. 55-57]. □

À luz deste teorema, o problema isoperimétrico 1.4.1 reduz-se a um problema sem restrições com Lagrangeano $L(x, y, y') = f(x, y, y') + \lambda g(x, y, y')$. Em geral, a solução da equação

de Euler-Lagrange tem duas constantes de integração mais a constante λ . As condições de fronteira $y(a) = A$, $y(b) = B$ e a restrição isoperimétrica dão três condições para a determinação destas constantes.

Exemplo 1.4.3. Determinar as extremais da funcional

$$\int_0^1 (y')^2 dx$$

sujeitas às condições de fronteira $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ e à restrição isoperimétrica $\int_0^1 xy dx = 0$.

Como não existem extremais da funcional $G[y(x)] = \int_0^1 xy dx$, estamos nas condições do teorema 1.4.2 e, de acordo com o mesmo, este problema reduz-se a um problema com Lagrangeano

$$L(x, y, y') = (y')^2 + \lambda xy$$

Recorrendo ao sistema de computação algébrica **Maple**:

```
>L:=diff(y(x),x)^2+lambda*x*y(x);
```

$$L := \left(\frac{d}{dx} y(x) \right)^2 + \lambda xy(x)$$

```
>eqEL:=convert(EulerLagrange(L,x,y(x)),list);
```

$$eqEL := \left[\lambda x - 2 \frac{d^2}{dx^2} y(x) \right]$$

```
>sol:=dsolve({op(eqEL),y(0)=0,y(1)=1},{y(x)});
```

$$sol := y(x) = \frac{1}{12} \lambda x^3 + \left(1 - \frac{1}{12} \lambda \right) x$$

Utilizando a restrição isoperimétrica $\int_0^1 xy dx = 0$ determinamos o valor de λ :

```
>y:=rhs(sol);
```

$$y := \frac{1}{12} \lambda x^3 + \left(1 - \frac{1}{12} \lambda \right) x$$

```
>i:=int(x*y,x=0..1)=0;
```

$$i := -\frac{1}{90} \lambda + \frac{1}{3} = 0$$

```
>solve(i,lambda);
```

Finalmente obtemos a extremal para o problema:

`>y:=subs(lambda=30,y);`

$$y := \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

1.5 Algumas extensões do problema elementar

Algumas das extensões do problema elementar do cálculo das variações envolvem funcionais que dependem de derivadas de ordem superior a um, que dependem de várias funções e/ou que dependem de funções de várias variáveis [12].

Não é objectivo desta dissertação explorar este tipo de problemas uma vez que no segundo e terceiro capítulos iremos apenas abordar problemas com derivadas de ordem um que envolvem funcionais que dependem de uma função de uma variável.

No entanto, consideramos que a apresentação dos dois problemas que se seguem contribuem para ilustrar e identificar potencialidades e fraquezas não só da função `EulerLagrange`, disponível no package `VariationalCalculus` do `Maple 9.5`, bem como do próprio sistema de computação algébrica `Maple`.

1.5.1 Problema do cálculo das variações com duas variáveis dependentes

No caso em que a funcional em (1.2.1) depende de n funções,

$$J[x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot)] = \int_a^b L(t, x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t)) dt,$$

a condição necessária de Euler-Lagrange é um sistema de n equações:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'_1} = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_n} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'_n} = 0$$

A função `EulerLagrange`, disponível no package `VariationalCalculus`, permite trabalhar com funcionais que envolvem mais de uma variável dependente. No exemplo que se segue exploraremos o caso particular cuja funcional depende de duas funções ($n = 2$).

Exemplo 1.5.1. Determinar as extremais do seguinte problema

$$J[x(t), y(t)] = \int_0^1 (x(t) + y(t) + x'(t)^2 + y'(t)^2) \rightarrow \min,$$

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 1,$$

$$x(1) = 2, \quad y(1) = 2.$$

Neste caso $L(t, x, y, x', y') = x + y + (x')^2 + (y')^2$. O sistema de equações de Euler-Lagrange toma a forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y'} = 0, \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{cases} 1 - 2x'' = 0, \\ 1 - 2y'' = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema sujeito às condições enunciadas obtemos as extremais:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{4}t + 1, \\ y(t) = \frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{4}t + 1. \end{cases}$$

Segue a resolução do problema recorrendo ao sistema de computação algébrica **Maple**. Começamos por definir o Lagrangeano L :

```
>L:=x(t)+y(t)+diff(x(t),t)^2+diff(y(t),t)^2:
```

```
>eqEL:=convert(EulerLagrange(L,t,[x(t),y(t)]),list);
```

$$eqEL := \left[1 - 2 \frac{d^2}{dt^2} x(t), 1 - 2 \frac{d^2}{dt^2} y(t), x(t) + y(t) - \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 - \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 = K_1 \right]$$

As extremais são obtidas resolvendo as duas equações diferenciais conjuntamente com as condições de fronteira dadas. Uma vez que temos um sistema de equações diferenciais, recorreremos ao comando Maple **dsolve**:

```
>dsolve({eqEL[1],eqEL[2],x(0)=1,y(0)=1,x(1)=2,y(1)=2},{x(t),y(t)});
```

$$\left\{ x(t) = \frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{4}t + 1, y(t) = \frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{4}t + 1 \right\}$$

1.5.2 Problema do cálculo das variações com derivadas de ordem superior

Sejam $a, b, a < b, A_k, B_k, k = \overline{0, n-1}$, números reais e $L : [a, b] \times \mathbb{R}^{1+m} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável. Consideremos o problema seguinte

$$J[x(\cdot)] = \int_a^b L(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(m)}(t)) dt \rightarrow \min, \quad (1.5.1)$$

$$x^{(k)}(a) = A_k, \quad x^{(k)}(b) = B_k, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad (1.5.2)$$

onde o mínimo se procura no conjunto das funções $2n$ vezes continuamente diferenciáveis no intervalo $[a, b]$: $C^{2n}([a, b]; \mathbb{R})$.

Para problemas do cálculo das variações com derivadas de ordem superior, as equações de Euler-Lagrange são generalizadas para:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial x''} - \dots + (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} \frac{\partial L}{\partial x^{(m)}} = 0 \quad (1.5.3)$$

Exemplo 1.5.2. Determinar as extremais do seguinte problema

$$J[x(t)] = \int_0^1 (x''(t))^2 dt \rightarrow \min, \quad (1.5.4)$$

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, & x(1) &= 0, \\ x'(0) &= 0, & x'(1) &= 1. \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

Este problema envolve a derivada de ordem dois. Uma das limitações da função **EulerLagrange** é que só podemos obter as equações de Euler-Lagrange para problemas com derivadas de ordem um, ficando de fora os problemas com derivadas de ordem superior a um, tal como é o caso do problema apresentado neste exemplo. A única maneira apresentada na ajuda disponibilizada pelo **Maple 9.5** para o package **VariationalCalculus**, seria reduzir um problema com derivadas de ordem superior, a um equivalente apenas com derivadas de primeira ordem.

No problema em mãos é possível fazer tal redução da seguinte maneira: fazemos a substituição $z = x'$, impondo a condição $\int_0^1 (z - x')^2 dt = 0$.

Tendo por base §1.4, resolvemos o problema

$$\int_0^1 (z'(t)^2 + \lambda(z(t) - x'(t))^2) dt \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, & x(1) &= 0, \\ z(0) &= 0, & z(1) &= 1. \end{aligned}$$

Trata-se de uma funcional que depende de duas funções (neste caso o Lagrangeano tem duas variáveis dependentes $x(\cdot)$ e $z(\cdot)$).

Recorrendo ao sistema de computação algébrica **Maple** e tendo por base o processo utilizado por Corless [5], vamos começar por definir o Lagrangeano L ,

```
>L:=diff(z(t),t)^2+lambda*(z(t)-diff(x(t),t))^2:
```

```
>eqEL:=convert(EulerLagrange(L,t,[x(t),z(t)]),list);
```

$$eqEL := \left[2\lambda \left(\frac{d}{dt}z(t) - \frac{d^2}{dt^2}x(t) \right), -2\lambda \left(z(t) - \frac{d}{dt}x(t) \right) = K_1, \right. \\ \left. 2\lambda \left(z(t) - \frac{d}{dt}x(t) \right) - 2\frac{d^2}{dt^2}z(t), -\left(\frac{d}{dt}z(t) \right)^2 + \lambda \left(z(t) - \frac{d}{dt}x(t) \right)^2 + \right. \\ \left. 2\left(\frac{d}{dt}x(t) \right) \lambda \left(z(t) - \frac{d}{dt}x(t) \right) = K_2 \right]$$

O comando **EulerLagrange** devolve duas equações de Euler-Lagrange e os respectivos dois integrais de energia. Tendo em conta a ordem dos elementos da lista devolvida, O **Maple** identifica as equações de Euler-Lagrange através dos comandos **eqEL[1]** e **eqEL[3]**:

```
>eqEL[1];
```

$$2\lambda \left(\frac{d}{dt}z(t) - \frac{d^2}{dt^2}x(t) \right)$$

```
>eqEL[3];
```

$$2\lambda \left(z(t) - \frac{d}{dt}x(t) \right) - 2\frac{d^2}{dt^2}z(t)$$

O operador **\$** no comando **diff** é utilizado para obter derivadas de ordem superior. Por exemplo,

```
>diff(x(t),t$3);
```

$$\frac{d^3}{dt^3}x(t)$$

Para resolver o sistema de equações de Euler-Lagrange correctamente,

$$\begin{cases} 2\lambda \left(\frac{d}{dt}z(t) - \frac{d^2}{dt^2}x(t) \right) = 0 \\ 2\lambda \left(z(t) - \frac{d}{dt}x(t) \right) - 2\frac{d^2}{dt^2}z(t) = 0 \end{cases}$$

temos de eliminar λ da seguinte maneira:

```
>eq:=diff(eqEL[3],t);
```

$$eq := 2\lambda \left(\frac{d}{dt}z(t) - \frac{d^2}{dt^2}x(t) \right) - 2\frac{d^3}{dt^3}z(t)$$

```
>eq1:=isolate(eq,2*lambda*((diff(z(t), t))-(diff(x(t), t$2))));
```


$$eq_1 := 2 \lambda \left(\frac{d}{dt} z(t) - \frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) = 2 \frac{d^3}{dt^3} z(t)$$

```
>eq2:=subs(eq1,eqEL[1]);
```

$$eq_2 := 2 \frac{d^3}{dt^3} z(t)$$

Efectuando a substituição seguinte obtemos, finalmente, a equação de Euler-Lagrange $2 \frac{d^4}{dt^4} x(t) = 0$ para a funcional (1.5.4):

```
>eq22:=subs(z(t)=diff(x(t),t),eq2);
```

$$eq_{22} := 2 \frac{d^4}{dt^4} x(t)$$

```
>sol:=dsolve(eq22,x(t));
```

$$sol := x(t) = \frac{1}{6} _C_1 t^3 + \frac{1}{2} _C_2 t^2 + _C_3 t + _C_4 \quad (1.5.6)$$

Encontrada a solução geral, que denominamos por *sol*, as constantes $_C_1$, $_C_2$, $_C_3$ e $_C_4$ são determinadas por intermédio das condições (1.5.5). Substituindo os valores de t e $x(t)$ respeitantes às condições $x(0) = 0$ e $x(1) = 0$ na solução *sol*, obtemos duas equações com duas incógnitas:

```
>sol1:=subs({x(t)=0,t=0},sol);
```

$$sol_1 := 0 = _C_4$$

```
>sol2:=subs({x(t)=0,t=1},sol);
```

$$sol_2 := 0 = \frac{1}{6} _C_1 + \frac{1}{2} _C_2 + _C_3 + _C_4$$

Substituindo os valores de t e $x'(t)$ respeitantes às condições $x'(0) = 0$ e $x'(1) = 1$ em *sold* obtemos mais duas equações com duas incógnitas:

```
>sold:=diff(sol,t);
```

$$sold := \frac{d}{dt} x(t) = \frac{1}{2} _C_1 t^2 + _C_2 t + _C_3$$

```
>sol3:=subs({diff(x(t),t)=1,t=1},sold);
```

$$sol_3 := 1 = \frac{1}{2} _C_1 + _C_2 + _C_3$$

```
>sol4:=subs({diff(x(t),t)=0,t=0},sod);
```

$$sol_4 := 0 = _C_3$$

Resolvendo um sistema de quatro equações (sol_1 , sol_2 , sol_3 , sol_4) com quatro incógnitas determinamos o valor das quatro constantes:

```
>const:=solve({sol1,sol2,sol3,sol4},{_C1,_C2,_C3,_C4});
```

$$const := \{ _C_2 = -2, _C_1 = 6, _C_3 = 0, _C_4 = 0 \}$$

Ao substituir o valor dessas constantes na solução geral, encontramos a extremal pretendida.

```
>subs(op(const),sol);
```

$$x(t) = t^3 - t^2$$

Recorrendo a alguns artifícios, determinámos a extremal do problema (1.5.4)-(1.5.5) que envolvia a derivada de ordem dois.

Uma vez que o Maple inclui a sua própria linguagem de programação, a limitação do package **VariationalCalculus** apenas permitir trabalhar directamente com problemas com derivada de ordem um, poderia ser também ultrapassada se o utilizador criar as suas próprias funções.

Em [22], encontramos, entre outras, a definição de uma função que permite obter as equações de Euler-Lagrange para funcionais do cálculo das variações de n variáveis dependentes e com derivadas até à ordem m , n e $m \in \mathbb{N}$. Esta função foi apelidada de $\text{ELnXmDX}(n,m,L)$ e a sua definição pode ser encontrada na íntegra no Apêndice A.

Resolvendo o mesmo problema, (1.5.4)-(1.5.5), e de acordo com [22], definimos, em Maple, o Lagrangeano L , não como expressão algébrica mas por uma função:

```
>L:=(t,x,dx,d2x)->d2x^2;
```

$$L := (t, x, dx, d2x) \mapsto d2x^2$$

Obtemos a equação de Euler-Lagrange por intermédio da função $\text{ELnXmDX}(n,m,L)$, para $n = 1$ e $m = 2$:

```
>eqEL:=ELnXmDX(1,2,L);
```

$$eqEL := 2 \frac{d^4}{dt^4} x_1(t) = 0$$

```
>sol:=dsolve(eqEL,x[1](t));
```

$$sol := x_1(t) = \frac{1}{6} _C1 t^3 + \frac{1}{2} _C2 t^2 + _C3 t + _C4$$

Se repetirmos o processo aplicado a partir de (1.5.6) e tendo em conta que estamos agora a trabalhar com a variável dependente x_1 , obtemos de novo a extremal $x_1(t) = t^3 - t^2$.

O problema do exemplo 1.5.1 em §1.5.1, poderia ser também facilmente resolvido através da função `ELnXmDX(n,m,L)`, para $n = 2$ e $m = 1$.

1.6 Conclusão

Para alguns casos particulares a equação de Euler-Lagrange admite integrais,

$$\Phi(t, x(t), x'(t)) = \text{constante},$$

que permitem reduzir a ordem da equação e simplificar o problema. De entre os cinco casos de integrabilidade que estudámos, damos particular importância a dois: integral de energia e integral de momento, uma vez que são devolvidos em conjunto com as equações de Euler-Lagrange, sempre que estas os admitam, pela função `EulerLagrange` do **Maple**.

Para este tipo de problemas, o cálculo das extremais, sob o ponto de vista do **Maple**, revelou-se mais simples recorrendo à equação de Euler-Lagrange do que utilizando os respectivos integrais. No entanto, no capítulo seguinte, só encontramos uma solução satisfatória para o problema da Braquistócrona através da resolução a partir do integral de energia.

À luz da abordagem feita sobre o problema isoperimétrico, resolvemos facilmente o problema com derivada de ordem um, gerado a partir de um com derivada de ordem dois. Uma vez que a função `EulerLagrange` do **Maple** só permite trabalhar com problemas variacionais de ordem um, a limitação com que nos deparámos no problema do exemplo 1.5.2 foi ultrapassada com sucesso.

Em alternativa ao processo que utilizámos para resolver o referido problema, damos a conhecer uma função, criada em [22], que permite obter as equações de Euler-Lagrange para funcionais de n variáveis dependentes e com derivadas até à ordem m .

Capítulo 2

O Problema da Braquistócrona

2.1 Introdução

O primeiro e, sem dúvida, o mais famoso problema associado ao desenvolvimento da teoria matemática do cálculo das variações é, como já foi referido, o problema da Braquistócrona:

Dados dois pontos A e B num plano vertical, qual o caminho APB que a partícula móvel P atravessa em tempo mínimo, assumindo que a sua aceleração é apenas devida à gravidade?

Este problema foi baseado num problema semelhante estudado por Galileo Galilei (1564-1642) em 1638 no seu famoso trabalho *Two New Sciences* [9], [18]. Galileo descobriu que o movimento de uma partícula ao longo de um segmento inclinado que une os pontos A e B demora mais tempo do que o movimento ao longo de uma linha quebrada formada por dois segmentos AC e CB , sendo C um ponto do arco de uma circunferência. Tal constatação sugeriu-lhe naturalmente a questão da forma da linha de queda mais rápida, a qual Galileo pensou tratar-se de um arco de circunferência. No final do século XVII descobriu-se que esta dedução de Galileo estava errada.

Em Junho de 1696, Johann Bernoulli (1667-1748) publicou o problema da Braquistócrona como um desafio à comunidade matemática. Depois de enunciar o problema, Johann Bernoulli assegurou aos seus leitores que a solução para o problema era muito útil na mecânica e que não era uma recta mas antes uma curva muito familiar aos Geómetras. O prazo para entrega de respostas imposto por Johann Bernoulli foi até ao fim do ano 1696, altura em que ele prometeu publicar a sua própria solução. No final do ano, torna a publicar o desafio juntando-lhe um problema adicional de natureza geométrica e prolongou o prazo de entrega até à Páscoa de 1697. Aquando do início do desafio, Johann Bernoulli também enviou o problema privadamente ao matemático Leibniz (1646-1716), numa carta datada de 9 de Junho de 1696. A 16 de Junho de 1696 recebeu uma solução completa como resposta. Foi na troca de correspondência entre Leibniz e Johann Bernoulli que surgiu o nome *Braquistócrona*

(*brachistochrone*, do grego *brachistos*, mínimo, e *chronos*, tempo) [8]. Em Maio de 1697 foi publicada, na *Acta Eruditorum*, a solução do problema.

Johann Bernoulli, o seu irmão Jacob Bernoulli, Leibniz, Newton e l'Hôpital sugeriram diferentes métodos de resolução do problema que levavam ao mesmo resultado.

A curva que soluciona o problema da Braquistócrona é a cicloide.

Neste capítulo exibiremos uma solução para o problema, não na linguagem geométrica de outros tempos mas sim recorrendo ao método desenvolvido por Euler e Lagrange, introduzido no capítulo anterior. Esta abordagem será feita recorrendo não só às "ferramentas" do cálculo das variações mas também ao sistema de computação algébrica **Maple 9.5**, indo de encontro ao objectivo desta dissertação.

Começaremos por, em §2.2, determinar a funcional integral para o problema da Braquistócrona e por apresentar uma formulação matemática para o mesmo [6], [8].

Em §2.3 apresentaremos a definição e algumas propriedades da cicloide, curva que soluciona o problema da Braquistócrona.

De seguida, em §2.4, determinaremos a solução, na forma paramétrica, da equação de Euler-Lagrange no caso da braquistócrona para dois pontos quaisquer, $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$, e calcularemos o tempo mínimo de descida ao longo da curva encontrada. O problema será também resolvido utilizando o **Maple**. As principais referências usadas nesta secção foram [7] e [25].

Consequentemente, em §2.4.1, apresentamos a solução de Euler-Lagrange no caso da braquistócrona para os valores específicos: $A(0, 2)$, $B(3, 1)$, num primeiro exemplo; $A(1, 3)$, $B(15, 1)$, num segundo exemplo. A análise destes dois problemas é feita utilizando o **Maple** e para cada um deles será também calculado o tempo mínimo de descida e serão traçadas as curvas que são solução dos mesmos. No primeiro exemplo, compararemos ainda o tempo de descida da partícula ao longo: da recta que passa por A e B ; e do arco da circunferência com centro $(3, c)$ que passa pelos dois respectivos pontos.

2.2 Formulação do problema

O problema da Braquistócrona consiste em determinar, dados dois pontos A e B num plano vertical, o caminho APB que a partícula móvel P atravessa em tempo mínimo, assumindo que a sua aceleração é apenas devida à gravidade.

Para resolver este problema consideramos todas as possíveis curvas que unem A e B . A

uma determinada curva γ corresponde um determinado valor T - tempo necessário para a partícula chegar de A a B . O tempo, T , depende da forma da curva. O objectivo é encontrar a curva que corresponde ao tempo mínimo.

Usando um sistema de coordenadas apropriado, consideremos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) , com $x_0 < x_1$ e $y_0 > y_1$, as coordenadas dos pontos A e B , respectivamente. Consideremos a curva arbitrária descrita pela equação

$$y = y(x), \quad x_0 \leq x \leq x_1.$$

A partícula de massa m tem velocidade inicial nula e não está sujeita a atrito. Sabemos, segundo a lei de conservação de energia, que

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = mgy_0 \quad (2.2.1)$$

onde g é a aceleração da força da gravidade, v a velocidade da partícula e y a sua ordenada. Então a velocidade é dada por

$$v = \sqrt{2g(y_0 - y)}$$

Por outro lado

$$v = \frac{ds}{dx}$$

com

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

onde $s(t)$ representa o comprimento do arco percorrido entre x_0 e x_1 .

Combinando os resultados, o tempo T necessário para a partícula deslizar de $A(x_0, y_0)$ até à posição final $B(x_1, y_1)$ é dado por

$$T = \int_{AB} dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{v} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{y_0 - y}} dx.$$

O problema da Braquistócrona é então formulado matematicamente como se segue:

$$T[y(\cdot)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{y_0 - y(x)}} dx \rightarrow \min \quad (2.2.2)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1, \quad y \in C^2(x_0, x_1)$$

Mostraremos, em §2.4, que a extremal deste problema é um arco de uma cicloíde (invertida).

2.3 A Ciclóide

A curva que resolve o problema da Braquistócrona é chamada de cicloide, nome dado por Galileo (1564-1642), que se havia interessado por outras das suas propriedades no início de 1600.

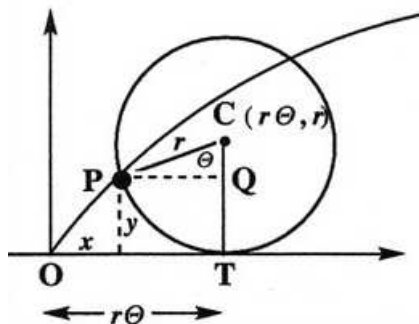
Cicloide é a trajectória descrita por um ponto fixo P da circunferência quando esta rola, sem deslizar, sobre uma recta.

A cicloide foi uma curva muito estudada no século XVII. O seu modo de geração e a descoberta das suas propriedades foram origem de inúmeras disputas entre os Geómetras da época, de tal forma que lhe chamavam a "Helena dos Geómetras" [27].

Em 1634, o matemático francês Roberval prova que a área da cicloide é exactamente o triplo da área do círculo gerador. Porém, a publicação de uma demonstração desse resultado só foi feita em 1644 por Torricelli, discípulo de Galileo. Em 1658, Christopher Wren publica a demonstração de que o comprimento de um arco de cicloide é oito vezes o raio do círculo gerador [17].

Outro problema interessante que também tem a cicloide como solução é o problema da Tautócrona. Este facto foi descoberto e publicado por Christian Huygens (1629-1695) no *Horologium oscillatorium* em 1673 [27]. Huygens mostrou que se uma partícula partir do repouso de um determinado ponto e deslizar, sob o efeito da gravidade, por uma cicloide, o tempo que a partícula demora a atingir o ponto mais baixo é independente do ponto de partida. Isto é, duas partículas que partam ao mesmo tempo de dois pontos diferentes A e B , alcançam o ponto C ao mesmo tempo.

Portanto a cicloide é uma curva *braquistócrona* - menor tempo de descida de um ponto a outro - e uma curva *tautócrona* - igual tempo de descida de qualquer ponto até ao ponto de altura mínima; sendo estas as suas duas propriedades mais importantes.



A cicloide que passa pela origem $(0,0)$ e é gerada pela circunferência de raio r é descrita, usualmente, na forma paramétrica pelo conjunto de pontos (x,y) com

$$\begin{cases} x = r(\theta - \sin \theta) \\ y = r(1 - \cos \theta) \end{cases} \quad (2.3.1)$$

onde $\theta \geq 0$, pois, considerando a figura anterior, temos:

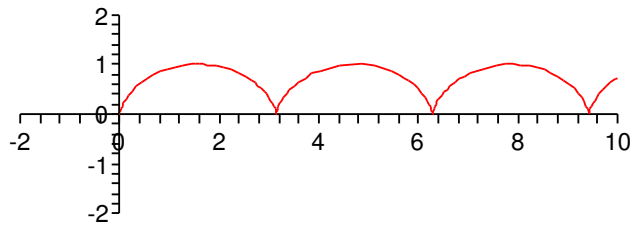
$$x = |OT| - |PQ| = r\theta - r \sin \theta$$

$$y = |TC| - |QC| = r - \cos \theta$$

Recorrendo ao **Maple**, podemos obter a representação da curva (2.3.1) para um valor de r , por exemplo, igual a $\frac{1}{2}$.

O **Maple** tem disponível a função **plot** que permite fazer os mais variados gráficos. Entre as inúmeras possibilidades, o **plot** permite traçar gráficos de funções definidas parametricamente.

```
>plot([1/2*(theta-sin(theta)),1/2*(1-cos(theta)),theta=0..infinity],-2..10,-2..2,
      scaling=constrained);
```



O primeiro, o segundo e o terceiro argumento do **plot** estão entre parênteses rectos e representam as funções reais em ordem ao parâmetro e a variação desse parâmetro. O quarto e quinto argumento do **plot** definem os intervalos dos eixos horizontal e vertical, respectivamente. Todas as outras *opções* (tais como: cor, tipo de escala, título do gráfico, ...) devem ser colocadas depois da especificação dos intervalos dos eixos. Executando o comando `>?plot[options]` podemos consultar as *opções* que temos disponíveis para a função **plot**.

2.4 Solução da equação de Euler-Lagrange no caso da Braquistócrona

No Problema da Braquistócrona (2.2.2), ignorando o factor constante $\frac{1}{\sqrt{2g}}$, a função $y(\cdot)$ que minimiza T será encontrada através da equação de Euler-Lagrange (1.3.1) com

$$L = \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{y_0 - y(x)}} \quad (2.4.1)$$

Como L não depende explicitamente de x , estamos no 4º Caso, apresentado em §1.3.1, no qual a equação de Euler-Lagrange admite o integral de energia

$$y'(x) \frac{\partial L}{\partial y'}(y(x), y'(x)) - L(y(x), y'(x)) = \text{const.}$$

Recorrendo ao sistema de computação algébrica **Maple**, determinamos facilmente a equação de Euler-Lagrange e o integral de energia:

```
>L := (1 + diff(y(x),x)^2)^(1/2)/(y0-y(x))^(1/2);
```

$$L := \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^2}}{\sqrt{y_0 - y(x)}}$$

```
>eqEL:=convert(simplify(EulerLagrange(L,x,y(x))),list);
```

$$eqEL := \left[\frac{1}{2} \frac{1 + \left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^2 - 2 \left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) y_0 + 2 \left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) y(x)}{(y_0 - y(x))^{\frac{3}{2}} \left(1 + \left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^2} \sqrt{y_0 - y(x)}} = K_1 \right]$$

De notar que, tal como referido no capítulo anterior, a variável K_1 , gerada pelo **Maple**, representa uma constante de integração arbitrária.

Ao aplicarmos o comando **dsolve** à equação de Euler-Lagrange, verificamos que o **Maple** só consegue devolver a solução de forma implícita.

```
>dsolve(eqEL[1],y(x));
```

$$\sqrt{-(y(x))^2 + (2y_0 - C_1)y(x) - y_0(y_0 - C_1)} + \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{y(x) - y_0 + \frac{1}{2}C_1}{\sqrt{-(y(x))^2 + 2y_0y(x) - y(x)C_1 - y_0^2 + y_0C_1}} \right) - C_1 - x - C_2 = 0,$$

$$\begin{aligned}
& -\sqrt{-(y(x))^2 + (2y_0 - C_1)y(x) - y_0(y_0 - C_1)} \\
& -\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{y(x) - y_0 + \frac{1}{2}C_1}{\sqrt{-(y(x))^2 + 2y_0y(x) - y(x)C_1 - y_0^2 + y_0C_1}}\right) - C_1 - x - C_2 = 0
\end{aligned}$$

Também não é capaz de determinar a solução paramétrica.

`>dsolve(eqEL[1],y(x),parametric);`

$$\begin{aligned}
& \sqrt{-(y(x))^2 + (2y_0 - C_1)y(x) - y_0(y_0 - C_1)} \\
& +\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{y(x) - y_0 + \frac{1}{2}C_1}{\sqrt{-(y(x))^2 + 2y_0y(x) - y(x)C_1 - y_0^2 + y_0C_1}}\right) - C_1 - x - C_2 = 0, \\
& -\sqrt{-(y(x))^2 + (2y_0 - C_1)y(x) - y_0(y_0 - C_1)} \\
& -\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{y(x) - y_0 + \frac{1}{2}C_1}{\sqrt{-(y(x))^2 + 2y_0y(x) - y(x)C_1 - y_0^2 + y_0C_1}}\right) - C_1 - x - C_2 = 0
\end{aligned}$$

Neste caso, a equação de Euler-Lagrange possui uma certa complexidade e nem através do **Maple** conseguimos obter uma solução satisfatória.

Não sendo vantajoso trabalhar com a equação de Euler-Lagrange, vamos trabalhar com o integral de energia.

Uma vez que as extremais para o problema da braquistócrona não podem ser dadas como $y = y(x)$, é indispensável recorrer à representação na forma paramétrica

$$\begin{cases} x = \Psi(\theta) \\ y = \Phi(\theta) \end{cases}$$

$$\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$$

com $\Psi(\theta)$ e $\Phi(\theta)$ continuamente diferenciáveis e satisfazendo a condição

$$\left(\frac{d\Psi}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi}{d\theta}\right)^2 \neq 0$$

O integral de energia,

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}\sqrt{y_0 - y}} = c$$

é equivalente a

$$(1 + (y')^2)(y_0 - y) = a$$

com $a = \frac{1}{c^2}$. Resolvendo em ordem a y' , temos

$$(y')^2 = \frac{a - y_0 + y}{y_0 - y}$$

de onde

$$y' = -\sqrt{\frac{a - (y_0 - y)}{y_0 - y}}. \quad (2.4.2)$$

Vamos trabalhar com a raiz negativa uma vez que a derivada é negativa, pois a função é decrescente (assumimos inicialmente $x_0 < x_1$ e $y_0 > y_1$).

A equação diferencial pode ser resolvida facilmente introduzindo uma nova função $\theta = \theta(x)$ através da seguinte relação [25]:

$$y_0 - y = a \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right). \quad (2.4.3)$$

Derivando em ordem a θ

$$dy = -a \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) d\theta \quad (2.4.4)$$

Mas

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Então por (2.4.2),

$$dx = -\frac{\sqrt{y_0 - y}}{\sqrt{a - (y_0 - y)}} dy$$

logo

$$\int dx = \int -\frac{\sqrt{y_0 - y}}{\sqrt{a - (y_0 - y)}} dy$$

Como

$$\frac{\sqrt{y_0 - y}}{\sqrt{a - (y_0 - y)}} = \frac{\sin \left(\frac{\theta}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\theta}{2} \right)}$$

temos

$$\int dx = \int \frac{\sin \left(\frac{\theta}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\theta}{2} \right)} a \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) d\theta$$

que é equivalente a

$$\int dx = \int a \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) d\theta$$

Assim

$$x = x_0 + \frac{a}{2} (\theta - \sin(\theta))$$

e portanto

$$\gamma : \begin{cases} x = x_0 + \frac{a}{2}(\theta - \sin(\theta)) \\ y = y_0 - \frac{a}{2}(1 - \cos(\theta)), \end{cases} \quad (2.4.5)$$

com $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$, onde θ_0 e θ_1 são os valores de θ nos pontos $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$.

Estas equações são as equações paramétricas de uma cicloide gerada pelo movimento de um ponto fixo localizado numa circunferência, de diâmetro a , que rola sobre a recta $y = y_0$. O parâmetro θ aumenta de θ_0 a θ_1 à medida que o ponto $P(x, y)$ se desloca de $A(x_0, y_0)$ até $B(x_1, y_1)$. O valor inicial do parâmetro será $\theta_0 = 0$ e para $\theta = \theta_1$,

$$\begin{cases} a(\theta_1 - \sin(\theta_1)) = 2(x_1 - x_0) \\ a(1 - \cos(\theta_1)) = -2(y_1 - y_0). \end{cases} \quad (2.4.6)$$

Este par de equações permite determinar valores únicos para as constantes a e θ_1 ($0 < \theta_1 < 2\pi$) em função dos valores dados x_0 , x_1 , y_0 e y_1 .

Com x e y na forma paramétrica podemos agora calcular o tempo de descida mínimo

$$\begin{aligned} T[y(\cdot)] &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{y_0 - y(x)}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\theta_1} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{y_0 - y(\theta)}} \frac{dx}{d\theta}(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\theta_1} \sqrt{a} d\theta = \sqrt{\frac{a}{2g}} \theta_1 \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

onde as constantes a e θ_1 são determinadas por (2.4.6).

Tendo por base [7] e [25], segue-se uma análise do problema recorrendo, ao sistema de computação algébrica **Maple** e na qual trabalhamos também com o integral de energia, que nos conduz aos mesmos resultados, (2.4.5) e (2.4.7).

Vimos anteriormente que dado o Lagrangeano L o comando **EulerLagrange** devolveu a equação de Euler-Lagrange e o integral de energia. Ao aplicar o comando **dsolve** ao integral de energia, com a opção **parametric**, o **Maple** devolve as extremais para o problema na forma paramétrica.

```
>sol:=dsolve(eqEL[2],y(x),parametric);
```

$$\begin{aligned} sol := \left[y(-T) = \frac{y_0 K_1^2 + y_0 K_1^2 - T^2 - 1}{K_1^2 (1 + -T^2)}, \right. \\ \left. x(-T) = \frac{-T + \arctan(-T) + \arctan(-T) - T^2 + -C_1 K_1^2 + -C_1 K_1^2 - T^2}{K_1^2 (1 + -T^2)} \right] \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

As expressões matemáticas de x e y são dadas em função do parâmetro $_T$. A constante $_C1$ é a segunda constante de integração. Uma nova função $\theta = \theta(x)$ é introduzida através da seguinte relação:

$$_T := (\cos(\theta/2)) / (\sin(\theta/2));$$

$$_T := -\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)}$$

$$K[1] := 1/\sqrt{a};$$

$$K_1 := \frac{1}{\sqrt{a}}$$

O segundo membro (right-hand side) da segunda equação devolvida em *sol* (representado, em Maple, por `rhs(sol[2])`) pode ser simplificado através do comando `simplify`.

$$x := \text{simplify}(\text{rhs}(\text{sol}[2]));$$

$$x := -\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) a \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right) - \arctan\left(\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)}\right) a + _C1$$

O comando `combine(f,trig)`, no qual f representa uma expressão, combina termos trigonométricos. Ao aplicarmos este comando reduzimos o primeiro termo de x a um dos termos desejados da forma final de x .

$$x := \text{combine}(x, \text{trig});$$

$$x := -\frac{1}{2} a \sin(\theta) - \arctan\left(\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)}\right) a + _C1$$

Recordemos que $\theta = 0$ quando $x = x_0$. Logo $_C1 = x_0 + a\frac{\pi}{2}$. A substituição $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ facilita também a simplificação de x .

$$x := \text{subs}(\{_C1 = x_0 + (\text{Pi}/2)*a, \cos(\theta/2) = \cot(\theta/2)*\sin(\theta/2)\}, x);$$

$$x := -\frac{1}{2} a \sin(\theta) - \left(\frac{1}{2} \pi - \text{arccot}\left(\cot\left(\frac{1}{2}\theta\right)\right)\right) a + x_0 + \frac{1}{2} \pi a$$

Recorrendo ao comando `combine` com a opção *trig* e efectuando a substituição $\text{arccot}\left(\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = \frac{\theta}{2}$, obtemos a forma final de x .

$$x := \text{combine}(x, \text{trig});$$

$$x := -\frac{1}{2} a \sin(\theta) + a \operatorname{arccot}\left(\cot\left(\frac{1}{2}\theta\right)\right) + x_0$$

```
>x:=subs(arccot(cot(theta/2))=theta/2,x);
```

$$x := -\frac{1}{2} a \sin(\theta) + \frac{1}{2} a \theta + x_0$$

Seleccionando o segundo membro da primeira equação devolvida em *sol* (representado, em Maple por `rhs(sol[1])`) e aplicando os comandos `simplify` e `combine`, este último com a opção *trig*, obtemos a forma final desejada para *y*.

```
>y:=simplify(rhs(sol[1]));
```

$$y := y_0 + a \left(\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) \right)^2 - a$$

```
>y:=combine(y,trig);
```

$$y := y_0 + \frac{1}{2} a \cos(\theta) - \frac{1}{2} a$$

Com a forma paramétrica de *x* e *y* determinada, o tempo de descida mínimo, *T*, pode ser calculado, em Maple, da seguinte forma:

```
>x:=x0+(a/2)*(theta-sin(theta)):
```

```
>y:=y0-(a/2)*(1-cos(theta)):
```

Derivamos *x* e *y* em ordem a *θ*

```
>x'(theta):=diff(x,theta);
```

$$x'(\theta) := \frac{1}{2} a (1 - \cos(\theta))$$

```
>y'(theta):=diff(y,theta);
```

$$y'(\theta) := -\frac{1}{2} a \sin(\theta)$$

de forma a calcular

$$\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{y_0 - y(\theta)}} \frac{dx}{d\theta}(\theta).$$

```
>f:=simplify(sqrt(1+(y'(theta)/x'(theta))^2)*x'(theta)/sqrt(y0-y));
```

$$f := -(-1 + \cos(\theta)) \sqrt{-(-1 + \cos(\theta))^{-1} a} \frac{1}{\sqrt{-a(-1 + \cos(\theta))}}$$

Vamos simplificar a expressão f assumindo $\theta > 0$. Designaremos a expressão devolvida por "integranda".

```
>integranda:=simplify(f)assuming theta>0;
```

$$integranda := \sqrt{a}$$

O tempo mínimo de descida, T , calcula-se integrando a "integranda" de $\theta = 0$ até θ_1 .

```
>T:=(1/sqrt(2*g))*int(integrando,theta=0..theta1);
```

$$T := \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}\sqrt{a}\theta_1}{\sqrt{g}}$$

Os valores das constantes a e θ_1 dependem das coordenadas dos pontos A e B .

2.4.1 Exemplos

Exemplo 2.4.1. Calculemos o tempo de descida T para o caso em que $A(0, 2)$ e $B(3, 1)$ e tracemos a curva que corresponde a esse tempo T .

Tal como referido anteriormente, o par de equações (2.4.6) permite determinar valores únicos para as constantes a e θ_1 ($0 < \theta_1 < 2\pi$) em função das coordenadas x_0, y_0 e x_1, y_1 dos pontos A e B , respectivamente.

Determinemos então os valores de a e θ_1 para $A(0, 2)$ e $B(3, 1)$:

```
>eq1:=a*(theta1-sin(theta1))=2*(3-0);
```

$$eq_1 := a(\theta_1 - \sin(\theta_1)) = 6$$

```
>eq2:=a*(1-cos(theta1))=-2*(1-2);
```

$$eq_2 := a(1 - \cos(\theta_1)) = 2$$

```
>sol:=fsolve({eq1,eq2},{a,theta1});
```

$$sol := \{\theta_1 = 4.051628024, a = 1.239374053\}$$

Vamos expressar os valores de a e θ_1 separadamente:


```
>theta1:=eval(theta1,sol);
```

$$\theta_1 := 4.051628024$$

```
>a:=eval(a,sol);
```

$$a := 1.239374053$$

Atribuídos os valores abaixo

```
>g:=9.8: x0:=0: y0:=2:
```

calculamos o tempo de descida mínimo, T , e exprimimos a extremal através das seguintes formas de x e y .

```
>T:=T;
```

$$T := 0.7204232715 \sqrt{2}$$

```
>evalf(T);
```

$$1.018832361$$

```
>x:=x;
```

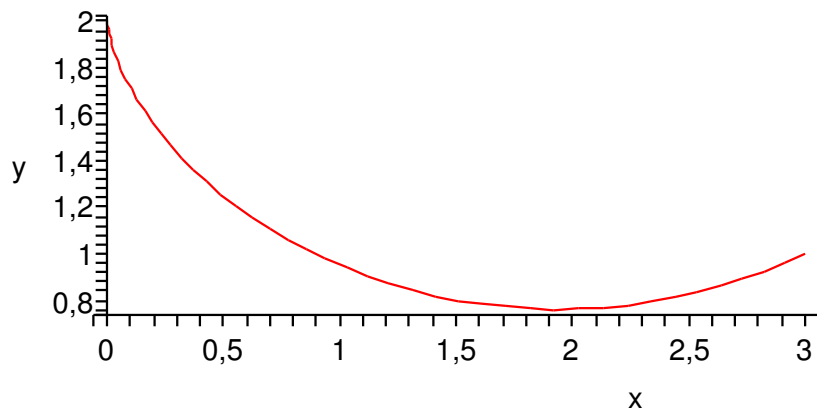
$$x := 0.6196870265 \theta - 0.6196870265 \sin(\theta)$$

```
>y:=y;
```

$$y := 1.380312974 + 0.6196870265 \cos(\theta)$$

Podemos traçar a curva para $\theta = 0$ até θ_1 numa escala restrita (*constrained scaling*). Matematicamente, a curva abaixo representada é parte de uma cicloíde invertida.

```
>plot([x,y,theta=0..theta1],scaling=constrained,labels=["x","y"]);
```



Ao longo da curva definida parametricamente por x e y , a partícula demora aproximadamente 1.02 segundos a deslizar de A até B . Este é o tempo mínimo aproximado entre estes dois pontos.

Recorrendo ao **Maple**, calculamos facilmente o tempo de descida da partícula ao longo de outras curvas que unam A a B .

Por exemplo, se determinarmos o tempo de descida, T_1 , ao longo da recta definida por A e B , verificamos que é superior a T .

```
>y1:=- (1/3)*x1+2;
```

$$y_1 := -\frac{1}{3}x_1 + 2$$

```
>integrand1:=sqrt(1+diff(y1,x1)^2)/sqrt(2-y1);
```

$$integrand1 := 13 \frac{\sqrt{10}\sqrt{3}}{\sqrt{x_1}}$$

```
>g:=9.8:
```

```
>T1:=(1/sqrt(2*g))*int(integranda1,x1=0..3);
```

$$T_1 := 0.4517539514 \sqrt{10}$$

```
>evalf(T1);
```

$$1.428571428$$

Seguindo a proposta feita em [17] (embora com outros valores), podemos também determinar o tempo de descida, T_2 , ao longo do arco da circunferência com centro $(3,c)$ e que passa pelos pontos $A(0,2)$ e $B(3,1)$ e verificar que é maior do que T . Esta circunferência tem por equação reduzida: $(x-3)^2 + (y-6)^2 = 25$.

Consideremos a semicircunferência definida por y_2 :

```
>y2 := 6-(16-x2^2+6*x2)^(1/2);
```

$$y_2 := 6 - \sqrt{16 - x_2^2 + 6x_2}$$

Calculamos o tempo T_2 pelo processo já utilizado anteriormente:

```
>integranda2:=sqrt(1+diff(y2,x2)^2)/sqrt(2-y2);
```

$$integranda2 := \frac{1}{2} \sqrt{4 + \frac{(-2x_2 + 6)^2}{16 - x_2^2 + 6x_2}} \frac{1}{\sqrt{-4 + \sqrt{16 - x_2^2 + 6x_2}}}$$

```
>g:=9.8:
```

```
>T2:=evalf((1/sqrt(2*g))*int(integranda2,x2=0..3));
```

$$T_2 := 1.151743820$$

O comando `display`, disponível no package `plots` do Maple, permite traçar várias "estruturas plot" no mesmo gráfico. Para podermos utilizar este comando temos de carregar o package no qual ele se encontra inserido:

```
>with(plots):
```

Definimos p_1 , p_2 e p_3 como sendo as "estruturas plot" seguintes:

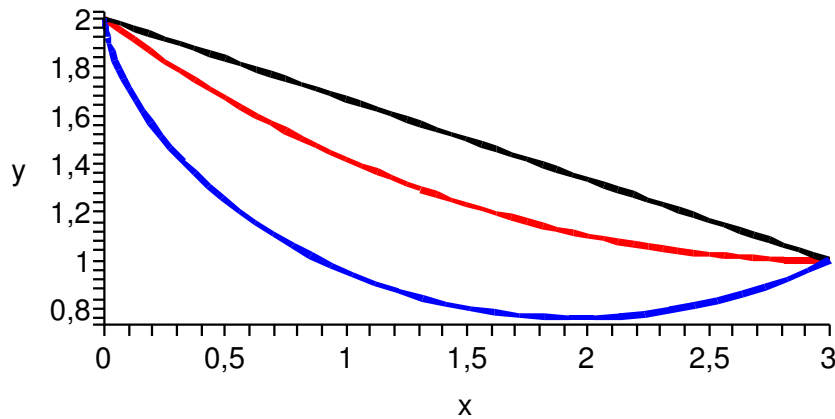
```
>p1:=plot([x,y,theta=0..theta1],scaling=constrained,thickness=2,labels=["x","y"],
          color=blue):
```

```
>p2:=plot(y1,x1=0..3,thickness=2,labels=["x","y"],scaling=constrained,color=black):
```

```
>p3:=plot(y2,x2=0..3,thickness=2,labels=["x","y"],scaling=constrained,color=red):
```

e obtemos uma representação gráfica das três curvas acima consideradas: cicloide, recta e arco da circunferência.

```
>display(p1,p2,p3);
```



Embora a cicloide seja a curva de maior comprimento, entre as três comparadas, concluímos que é a curva do tempo mínimo.

Exemplo 2.4.2. Calculemos o tempo de descida mínimo T para o caso em que $A(1, 3)$ e $B(15, 1)$ e tracemos a curva.

```
>eq1:=a*(theta1-sin(theta1))=2*(15-1);
```

$$eq1 := a(\theta_1 - \sin(\theta_1)) = 28$$

```
>eq2:=a*(1-cos(theta1))=-2*(1-3);
```

$$eq2 := a(1 - \cos(\theta_1)) = 4$$

```
>sol:=fsolve({eq1,eq2},{a,theta1});
```

$$sol := \{a = 4.776249228, \theta_1 = 4.875635855\}$$

```
>theta1:=eval(theta1,sol);
```

$$\theta_1 := 4.875635855$$

```
>a:=eval(a,sol);
```

$$a := 4.776249228$$

```
>g:=9.8:x0:=1:y0:=3:
```

```
>T:=evalf(T);
```

$$T := 2.406837209$$

O tempo de descida mínimo é de, aproximadamente, 2.4 segundos.

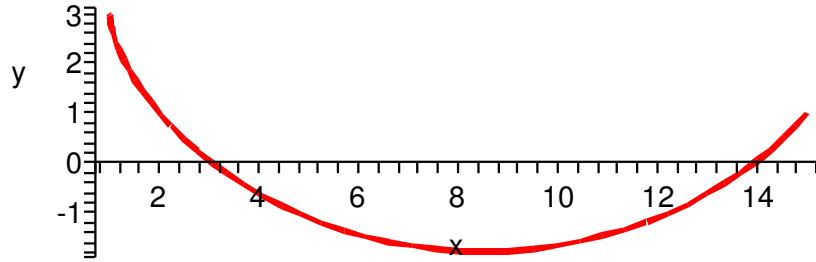
```
>x:=x;
```

$$x := 1 + 2.388124614\theta - 2.388124614 \sin(\theta)$$

```
>y:=y;
```

$$y := 0.611875386 + 2.388124614 \cos(\theta)$$

```
>plot([x,y,theta=0..theta1],scaling=constrained,thickness=2,labels=["x","y"]);
```



2.5 Conclusão

Dados dois quaisquer pontos $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$ do plano vertical, o problema da Braquistócrona foi formulado matematicamente como se segue:

$$T[y(\cdot)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{y_0 - y(x)}} dx \rightarrow \min$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1, \quad y \in C^2(x_0, x_1)$$

sendo T o tempo necessário para a partícula deslizar da posição inicial $A(x_0, y_0)$ até à posição final $B(x_1, y_1)$.

A solução deste problema é um arco de cicloide cujas equações paramétricas são dadas por,

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{a}{2}(\theta - \sin(\theta)) \\ y = y_0 - \frac{a}{2}(1 - \cos(\theta)), \end{cases}$$

com $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$, onde θ_0 e θ_1 são os valores de θ nos pontos dados $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$.

Com a versão 9.5 do **Maple** conseguimos determinar uma forma paramétrica, (2.4.8), das extremas para o problema da Braquistócrona:

$$y(-T) = \frac{y_0 K_1^2 + y_1 K_1^2 - T^2 - 1}{K_1^2 (1 + T^2)}$$

$$x(-T) = \frac{-T + \arctan(-T) + \arctan(-T) - T^2 + -C_1 K_1^2 + -C_1 K_1^2 - T^2}{K_1^2 (1 + T^2)}$$

Esta representação paramétrica, devolvida pelo **Maple**, é menos elegante que a representação paramétrica usual da cicloide, atrás descrita, a qual conseguimos, no entanto, obter, via **Maple**, através de alguns artifícios.

Calculámos o tempo, T , de descida mínimo, associado à curva encontrada, que é dado por

$$T[y(\cdot)] = \sqrt{\frac{a}{2g}} \theta_1$$

onde as constantes a e θ_1 são determinadas em função dos valores dados x_0 , x_1 , y_0 e y_1 .

A representação gráfica simultânea das três curvas - cicloide, recta e semicircunferência - obtida em §2.4.1, mostra que a cicloide é a curva de maior comprimento entre as três comparadas, seguindo-se o arco de circunferência e o segmento de recta. A par desta observação é interessante concluir que, ainda assim, a cicloide é a curva de tempo mínimo seguindo-se o arco de circunferência e o segmento de recta.

No capítulo seguinte exploraremos uma variante do problema da Braquistócrona. Constatemos que, ao reformular o problema clássico, obteremos algumas conclusões diferentes das apresentadas nesta secção.

Os recursos gráficos aliados ao estudo do problema explorado neste capítulo foram, no nosso entender, uma mais valia.

Capítulo 3

Variante do Problema da Braquistócrona

3.1 Introdução

Para além do problema publicado por John Bernoulli apresentado em §2.2, muitas variantes do problema da Braquistócrona têm sido colocadas e resolvidas ao longo dos tempos: Braquistócrona através do planeta Terra, [25]; problema sob a presença de atrito, [11]; etc.

No problema da Braquistócrona clássico, considerado no Capítulo 2, assumimos que a aceleração da partícula é apenas devida à gravidade. Esta aplicação é válida somente no vácuo, ignorando quaisquer forças friccionais [11]. É natural que sejam várias as questões geradas a partir deste problema, tornando-o mais real, tais como: O que acontece se a resistência do ar for incluída no problema? Qual será o efeito na forma da curva "mais rápida" quando a fricção é incluída no problema?

Muitas questões igualmente interessantes podem ser geradas restringindo a classe das funções admissíveis.

Ao contrário do problema clássico, no qual se assumiu a Terra como inexistente (apenas o campo gravitacional existia), vamos impor agora a condição $y \geq 0$ na reformulação do mesmo. Isto implica, obviamente (cf. por exemplo a figura no final da secção §2.4.1) que a solução geral do problema será diferente.

Neste capítulo teremos como principal referência o artigo [21].

Começaremos por, em §3.2, reformular o problema da Braquistócrona clássico. Para além das condições de fronteira, impomos duas condições que restringirão a classe das funções admissíveis: a curva que corresponde ao tempo mínimo terá de ser encontrada entre as funções $y = y(x)$ que unem A e B e que satisfazem as condições $y'' \geq 0$ e $0 \leq y(x) \leq y_0(x)$, onde

$y_0(x)$ é a recta que passa por A e B . Denotaremos por S este conjunto.

Sem perda de generalidade, consideraremos $A(0, 1)$ e $B(b, 0)$, com $b > 0$, os pontos inicial e final, respectivamente.

Em §3.3, provaremos que, se $b < \frac{4}{3}$, então $\exists \tilde{y} \in S : T(\tilde{y}) \leq T_0 := T(y_0)$, com $T(y) = \int_0^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{1-y}$.

Em §3.3.1 e §3.3.2, faremos uma pequena abordagem ao método de interpolação de Thiele uma vez que o recurso à função `ThieleInterpolation`, disponível no package `CurveFitting` do `Maple`, nos permitiu encontrar uma função nas condições descritas no parágrafo anterior.

Em §3.4, apresentaremos um novo método de integração da equação de Euler-Lagrange para o problema da Braquistócrona considerado, método este introduzido em [21], e mostraremos que para $b > \frac{\pi}{2}$ não existe solução de Euler-Lagrange da funcional (3.2.5), com $y'' \geq 0$ e $0 \leq y(x) \leq y_0(x)$, que satisfaça as condições de fronteira $y(0) = 1$ e $y(b) = 0$.

Finalmente, em §3.5, concluímos que apesar do problema da Braquistócrona ser bastante antigo, existem questões para as quais parece ainda não haver resposta.

3.2 Reformulação do problema da Braquistócrona

O problema da Braquistócrona clássico, tal como já foi referido nos capítulos anteriores, consiste em determinar, dados dois pontos A e B num plano vertical, o caminho APB que a partícula móvel P atravessa em tempo mínimo, assumindo que a sua aceleração é apenas devida à gravidade.

Sejam $A(0, 1)$ e $B(b, 0)$, $b > 0$. Ignorando o factor constante $\frac{1}{\sqrt{2g}}$, este problema é formulado matematicamente como se segue:

$$T[y(\cdot)] = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{1 - y(x)}} dx \rightarrow \min \quad (3.2.1)$$

$$y(0) = 1, \quad y(1) = b, \quad (3.2.2)$$

com $y \in C^2(0, b)$.

Suponhamos adicionalmente a (3.2.2) que,

$$y'' \geq 0, \quad 0 \leq y(x) \leq y_0(x), \quad (3.2.3)$$

onde, $y_0(x)$ é a recta que passa pelos pontos A e B e tem por equação

$$y_0(x) = 1 - \frac{x}{b}.$$

Seja S o conjunto

$$S = \{y(x) : (3.2.2), \quad (3.2.3), \quad y \in C^2(0, b)\}. \quad (3.2.4)$$

De acordo com [21], vamos reconsiderar o problema, (3.2.1)-(3.2.2), restringindo a classe das funções admissíveis por (3.2.3). Reformulamos, então, o problema matematicamente como se segue:

$$T[y(\cdot)] = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{1 - y(x)}} dx \rightarrow \min \quad (3.2.5)$$

$$y \in S \quad (3.2.6)$$

3.3 Questão

Nesta secção, atendendo à reformulação do problema da Braquistócrona feita em §3.2, exploramos a seguinte questão:

Será verdade que

$$T(y) \leq T_0 := T(y_0) = 2\sqrt{1 + b^2}, \quad \forall y \in S \quad ? \quad (3.3.1)$$

A resposta é negativa.

No exemplo apresentado em §3.3.2, encontramos uma função $\tilde{y} \in S$ que verifica a desigualdade

$$T(\tilde{y}) > T_0.$$

Pretendendo dar uma resposta mais geral à questão colocada, vamos provar, tendo por base [21] e recorrendo ao sistema de computação algébrica **Maple**, que:

Se $b < \frac{4}{3}$, então (3.3.1) é falsa.

Seja, então, P_a um polígono que une A e B , constituído por dois segmentos de recta: um une o ponto $A(0, 1)$ ao ponto $(a, 0)$, com $0 < a < b$; o outro une os pontos $(a, 0)$ e $B(b, 0)$:

$$P_a(x) = \begin{cases} -\frac{1}{a}x + 1 & \text{se } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{se } a < x \leq b \end{cases}$$

Esta curva não é C^2 , mas pode ser suavizada de modo a tornar-se C^2 através de uma pequena e arbitrária mudança da funcional $T_a := T(P_a)$. A curva suavizada pertence a S .

Calculemos $T(P_a)$,

$$\begin{aligned} T(P_a) &= \int_0^a \frac{\sqrt{1 + (-\frac{1}{a})^2}}{\sqrt{\frac{x}{a}}} dx + \int_a^b dx \\ &= \frac{\sqrt{a(a^2 + 1)}}{a} \int_0^a \sqrt{x} dx + b - a \\ &= \frac{\sqrt{a(a^2 + 1)}}{a} (2\sqrt{a}) + b - a \\ &= 2\sqrt{1 + a^2} + b - a \end{aligned}$$

Se $0 < b < \frac{4}{3}$, então para $a > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$T(P_a) > T_0.$$

Considerando a suficientemente pequeno, recorrendo ao polinómio de Taylor, de ordem 1, de $T(P_a)$ em volta de a , vamos aproximar localmente $T(P_a)$ numa vizinhança de a . Então ¹

$$T(P_a) = 2 + b + O(a), \quad a \rightarrow 0.$$

A desigualdade

$$2 + b > 2\sqrt{1 + b^2} \quad \text{se} \quad 0 < b < \frac{4}{3}$$

é facilmente verificada recorrendo ao **Maple**:

```
>g1:=2+b;
```

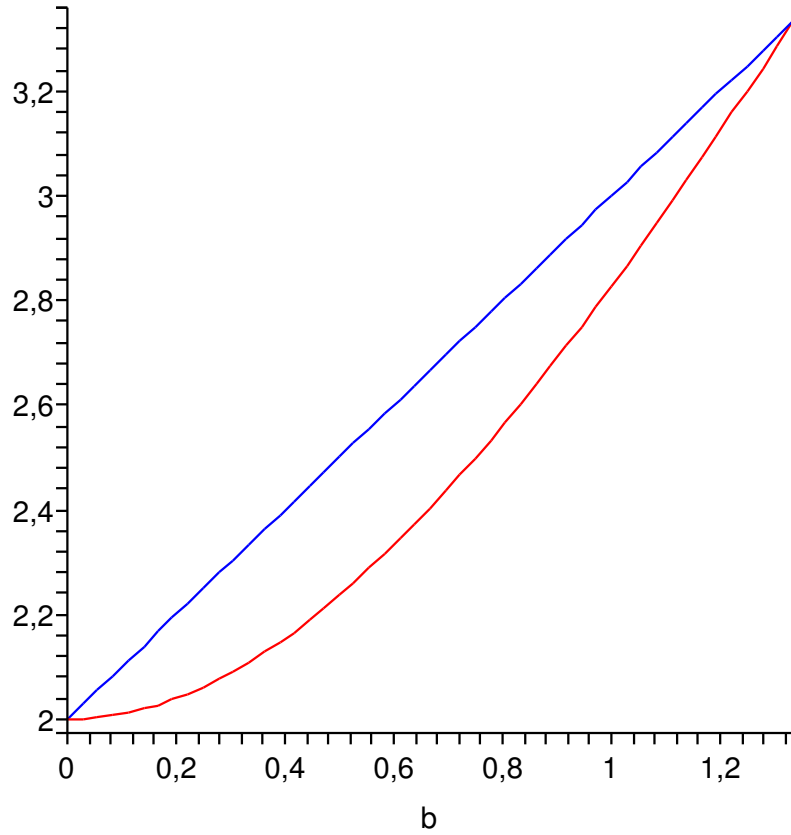
$$g1 := 2 + b$$

```
>g2:=2*sqrt(1+b^2);
```

$$g2 := 2\sqrt{1 + b^2}$$

```
>plot([g1,g2],b=0..4/3);
```

¹Os cálculos auxiliares efectuados podem ser encontrados em (Apêndice B.0.1, página 71).



3.3.1 Interpolação racional de Thiele

A interpolação racional de Thiele (1909) permite determinar uma fórmula explícita para uma função racional que passe exactamente por um conjunto de pontos conhecidos.

Nesta secção, fazemos uma pequena abordagem ao método desenvolvido por Thiele (1838-1910), uma vez que o vamos utilizar no exemplo apresentado em §3.3.2.

A fórmula de interpolação de Thiele pode ser expressa nos termos das *diferenças invertidas*, [13], ou das *diferenças recíprocas*, [3].

Dando a conhecer apenas um destes métodos e de acordo com [3], as diferenças recíprocas, ρ , são dadas por:

$$\begin{aligned}\rho_0 &\equiv \rho[z_0] = f(z_0) \\ \rho_1 &\equiv \rho[z_0, z_1] = (z_0 - z_1)\{f(z_0) - f(z_1)\}^{-1} \\ &\dots\end{aligned}$$

Generalizando para $n > 1$ temos,

$$\rho_n \equiv \rho[z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n]$$

com

$$\rho[z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n] = \frac{z_0 - z_n}{\rho[z_0, \dots, z_{n-1}] - \rho[z_1, \dots, z_{n-1}, z_n]} + \rho[z_1, \dots, z_{n-1}]$$

Então a fórmula de interpolação de Thiele em z_0, z_1, \dots, z_n sendo $z_i, i = 0, \dots, n$, uma sequência de $n + 1$ pontos é

$$f(z) = \rho_0 + \frac{z - z_0}{\rho_1} + \frac{z - z_1}{\rho_2 - \rho_0} + \frac{z - z_2}{\rho_3 - \rho_1} + \dots + \frac{z - z_{n-1}}{\rho_n - \rho_{n-2}}.$$

O processo de interpolação racional de Thiele é relativamente fácil de aplicar para condições simples, utilizando o sistema de computação algébrica **Maple**.

O package **CurveFitting** do **Maple** proporciona um conjunto de comandos que permitem criar uma função que passa exactamente ou perto de um conjunto de pontos conhecidos. A função

ThieleInterpolation(xydata,v)

é uma das funções disponibilizadas neste package e, como tal, pode ser utilizada na forma **ThieleInterpolation(...)** somente depois de executarmos o comando **with(CurveFitting)**. Pode ser também acedida executando o comando **CurveFitting[ThieleInterpolation](...)**.

A rotina **ThieleInterpolation(xydata,v)**, onde *xydata* representa uma lista de pontos da forma $[[x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots, [x_n, y_n]]$, devolve a expressão algébrica da função racional na forma de fracção contínua na variável v que passa pelos pontos $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$.

Se v for um valor numérico, então é-nos devolvido o valor da função neste ponto.

Quando n é ímpar, o numerador e o denominador polinomiais têm grau $\frac{n-1}{2}$. Quando n é par, o numerador tem grau $\frac{n}{2}$ e o denominador tem grau $\frac{n}{2} - 1$.

3.3.2 Exemplo

Consideremos os pontos $A(0, 1)$ e $B(1, 0)$. A recta $y_0(x)$ que passa por estes pontos tem por equação

$$y_0(x) = 1 - x.$$

O tempo T_0 necessário para uma partícula deslizar de A a B através de $y_0(x)$ é dado por

$$T_0 := T(y_0) = 2\sqrt{2}.$$

Nesta secção vamos mostrar, servindo-nos das potencialidades do **Maple**, que $\exists \tilde{y} \in S : T(\tilde{y}) > T_0$.

Recorrendo à função **ThieleInterpolation** disponível no package **CurveFitting** do **Maple 9.5**, conseguimos encontrar uma função que satisfaz as condições acima referidas.

Começamos por "carregar" o package em memória, executando o comando seguinte:

```
>with(CurveFitting):
```

Através do comando `ThieleInterpolation` obtemos a expressão algébrica de uma função racional na forma de fracção contínua, que passa pelos pontos A , B e $(0.01, 0.01)$:

```
>ThieleInterpolation([[0,1],[0.01,0.01],[1,0]], x);
```

$$1 + \frac{x}{-0.000102030406 - 0.9998979694 x}$$

É possível definir uma função a partir de uma expressão algébrica usando o comando `unapply`.

```
>f := unapply(ThieleInterpolation([[0,1],[0.01,0.01],[1,0]], x), x);
```

$$f := x \mapsto 1 + \frac{x}{-0.000102030406 - 0.9998979694 x}$$

```
>solve(denom(f(x))-1=0,x);
```

$$-0.0001020408173$$

Depois de criada a função f e de verificarmos que está bem definida no intervalo $[0, 1]$, calculamos facilmente o tempo necessário para a partícula deslizar de A até B através desta curva.

```
>T := y -> evalf(int(sqrt(1+(D(y)(x))^2)/sqrt(1-y(x)),x=0..1));
```

$$T := y \mapsto \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + (D(y)(x))^2}}{\sqrt{1 - y(x)}} dx$$

```
>T(f);
```

$$2.983263854$$

Verificamos assim que $T(f) = 2.983263854 > 2.828427124 = T_0$.

Recorrendo ao **Maple**, verificámos que f possui primeira e segunda derivadas no intervalo $]0, 1[$ e que estas são contínuas em $]0, 1[$ uma vez que o numerador e o denominador de ambas são funções polinomiais. Concluimos assim que $f \in C^2(0, 1)$.

Através das representações gráficas das funções f e y_0 , obtidas utilizando o **Maple**, verificamos facilmente as condições $0 \leq f(x) \leq y_0(x)$ e $y'' \geq 0$.

Como $f(0) = 1$ e $f(1) = 0$, concluímos², finalmente, que $f \in S$.

²Os cálculos auxiliares efectuados no sistema de computação algébrica Maple e as representações gráficas das funções, são apresentados em (B.0.2, página 71).

3.4 Integração da equação de Euler-Lagrange

Na solução clássica foi provado que a Braquistócrona une quaisquer dois pontos do plano vertical. Isto porque se assumiu a Terra como inexistente: apenas o campo gravitacional existia. Na nossa reformulação do problema nem quaisquer dois pontos podem ser unidos por uma extremal da funcional (3.2.5), tal como é demonstrado nesta secção.

Para tal utilizamos um novo método de integração da equação de Euler-Lagrange, proposto em [21], que nos permite verificar para que valores de b não existe solução da equação de Euler-Lagrange que satisfaça as condições (3.2.2)-(3.2.3).

A equação de Euler-Lagrange para (3.2.1) é

$$\frac{1}{2} (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} (1 - y)^{-\frac{3}{2}} - \frac{d}{dx} \left[(1 - y)^{-\frac{1}{2}} (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}} y' \right] = 0 \quad (3.4.1)$$

Fazendo a mudança de variável: $p = p(y) = y'(x) = \frac{dy}{dx}$, de (3.4.1) obtemos

$$\frac{1}{2} (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} (1 - y)^{-\frac{3}{2}} - p \frac{d}{dy} \left[(1 - y)^{-\frac{1}{2}} (1 + p^2)^{-\frac{1}{2}} p \right] = 0. \quad (3.4.2)$$

Denotemos

$$z := z(y) = (1 - y)^{-\frac{1}{2}} (1 + p^2)^{-\frac{1}{2}} p. \quad (3.4.3)$$

De (3.4.2) obtemos, então

$$\begin{aligned} p \frac{dz}{dy} &= \frac{1}{2} (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} (1 - y)^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 2 \frac{dz}{dy} = \frac{(1 + p^2)^{\frac{1}{2}} (1 - y)^{-\frac{3}{2}}}{p} \\ &\Leftrightarrow 2z \frac{dz}{dy} = (1 - y)^{-2} \end{aligned}$$

Esta equação diferencial pode ser facilmente resolvida recorrendo ao Maple:

```
>eq:=2*z(y)*diff(z(y),y)=(1-y)^(-2);
```

$$eq := 2 z(y) \frac{d}{dy} z(y) = (1 - y)^{-2}$$

```
>sol:=dsolve(eq,z(y));
```

$$sol := z(y) = \frac{\sqrt{(-1 + y)(-C_1 y - 1 - C_1)}}{-1 + y}, z(y) = -\frac{\sqrt{(-1 + y)(-C_1 y - 1 - C_1)}}{-1 + y}$$

```
>sol1:=rhs(sol[1]);
```


$$sol1 := \frac{\sqrt{(-1+y)(-C_1 y - 1 - C_1)}}{-1+y}$$

>sol2:=rhs(sol[2]);

$$sol2 := -\frac{\sqrt{(-1+y)(-C_1 y - 1 - C_1)}}{-1+y}$$

>sol1^2;

$$\frac{-C_1 y - 1 - C_1}{-1+y}$$

>sol2^2;

$$\frac{-C_1 y - 1 - C_1}{-1+y}$$

Uma vez que o quadrado de $sol1$ é igual ao quadrado de $sol2$, temos

$$\begin{aligned} z^2(y) &= \frac{c_1(y-1) - 1}{y-1} \\ &= c_1 - \frac{1}{y-1} \\ &= c_1 + (1-y)^{-1} \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

De (3.4.3) e de (3.4.4), obtemos

$$\left((1-y)^{-\frac{1}{2}} (1+p^2)^{-\frac{1}{2}} p \right)^2 = c_1 + (1-y)^{-1}$$

ou

$$(1-y)^{-1} \frac{p^2}{1+p^2} = c_1 + (1-y)^{-1}$$

donde

$$\frac{p^2}{1+p^2} = c_1(1-y) + 1$$

logo

$$-\frac{1}{1+p^2} = c_1(1-y)$$

ou, finalmente,

$$p^2 = -\frac{1}{c_1(1-y)} - 1 \tag{3.4.5}$$

onde c_1 é uma constante de integração.

Desde que $0 < y(x) < 1$, é claro de (3.4.5) que $c_1 < 0$. Denotemos $-\frac{1}{c_1} = c_2 > 0$. Então

$$p^2 = \frac{c_2}{1-y} - 1$$

e escrevamos (3.4.5), tendo em conta que $y'(x) \leq 0$, como

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{c_2 - 1 + y}{1 - y}} = -\sqrt{\frac{c + y}{1 - y}}, \quad c := c_2 - 1 > 0. \quad (3.4.6)$$

A condição $y(0) = 1$ e a equação (3.4.6) implicam

$$x = -\int_1^y \sqrt{\frac{1-y}{c+y}} dy = \int_y^1 \sqrt{\frac{1-y}{c+y}} dy. \quad (3.4.7)$$

A constante c em (3.4.7) pode ser determinada pela condição $y(b) = 0$:

$$b = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-y}{c+y}} dy. \quad (3.4.8)$$

Este integral pode ser calculado recorrendo à substituição $\frac{1-y}{c+y} = t^2$, donde

$$y = \frac{1-ct^2}{1+t^2}, \quad dy = -2(c+1) \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$$

Logo

$$\begin{aligned} b &= -\int_{c^{-\frac{1}{2}}}^0 2(c+1) \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt \\ &= 2(c+1) \int_0^{c^{-\frac{1}{2}}} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt \end{aligned}$$

Recorrendo ao **Maple**, calculamos facilmente o valor do integral.

```
>int((t^2)/(1+t^2)^2,t=0..c^(-1/2));
```

$$-\frac{1}{2} \frac{c - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right) c^{\frac{3}{2}} - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right) \sqrt{c}}{\sqrt{c}(c+1)}$$

Logo

$$b = \frac{-c + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right) c\sqrt{c} + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right) \sqrt{c}}{\sqrt{c}}$$

e, portanto

$$b = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right) (c+1) - \sqrt{c} := g(c) \quad (3.4.9)$$

onde $c \geq 0$ desde que em (3.4.8) $c+y > 0$ para todo $y \in [0, 1]$. A função $g(c)$ decai em $[0, +\infty[$ desde que $g' < 0$ para $c > 0$. Portanto

$$\max_{c \geq 0} g(c) = g(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Acabámos de provar o lema seguinte:

Lema 3.4.1. A equação (3.4.9) não tem solução para $b > \frac{\pi}{2}$.

Concluimos assim que, se $b > \frac{\pi}{2}$ a equação de Euler-Lagrange (3.4.1) não tem solução que satisfaça as condições de fronteira (3.2.2).

Consequentemente, para $b > \frac{\pi}{2}$, a funcional $T(y)$ em (3.2.5) não tem pontos críticos.

De notar que (3.4.7) pode ser escrita como,

$$x = (c + 1) \left[\arctan \sqrt{\frac{1-y}{c+y}} - \sqrt{\frac{1-y}{c+y}} \frac{c+y}{c+1} \right]. \quad (3.4.10)$$

De facto, recorrendo novamente à substituição $\frac{1-y}{c+y} = t^2$, temos

$$\begin{aligned} x &= \int_y^1 \sqrt{\frac{1-y}{c+y}} dy \\ &= - \int_{\sqrt{\frac{1-y}{c+y}}}^0 2(c+1) \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt \\ &= 2(c+1) \int_0^{\sqrt{\frac{1-y}{c+y}}} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt \end{aligned}$$

Recorrendo ao **Maple**, calculamos facilmente o valor deste integral:

```
>int(t^2/(1+t^2)^2,t=0..sqrt((1-y)/(c+y)));
```

$$- \frac{-\arctan\left(\sqrt{-\frac{y-1}{c+y}}\right)c - \arctan\left(\sqrt{-\frac{y-1}{c+y}}\right) + \sqrt{-\frac{y-1}{c+y}}c + \sqrt{-\frac{y-1}{c+y}}y}{2(c+1)}$$

Logo,

$$\begin{aligned} x &= 2(c+1) \left(\frac{-\sqrt{\frac{1-y}{c+y}}(c+y) + \arctan \sqrt{\frac{1-y}{c+y}}(c+1)}{2(c+1)} \right) \\ &= (c+1) \left(\arctan \sqrt{\frac{1-y}{c+y}} - \sqrt{\frac{1-y}{c+y}} \frac{c+y}{c+1} \right) \end{aligned}$$

Utilizando a condição $y(b) = 0$, facilmente obtemos de (3.4.10) a equação (3.4.9).

3.5 Conclusão

Como resposta à questão (3.3.1) colocada em §3.3, provámos que, se $b < \frac{4}{3}$, então existe $y \in S$ tal que $T(y) > T(y_0)$.

Como exemplo, encontrámos a função $f \in S$,

$$f(x) = 1 + \frac{x}{-0.000102030406 - 0.9998979694x} \quad 0 \leq x \leq 1,$$

que verifica a desigualdade $T(f) > T(y_0)$.

Em [21] e relativamente à questão (3.3.1) encontramos ainda uma discussão da seguinte conjectura: se $b \geq \frac{4}{3}$ então (3.3.1) é verdadeira.

Recorrendo ao novo método de integração da equação de Euler-Lagrange, proposto em [21], provámos que a equação (3.4.1) não tem solução para $b > \frac{\pi}{2}$. Isto significa que para $b > \frac{\pi}{2}$ a funcional $T(y)$ em (3.2.5) não tem pontos críticos.

Este novo método de integração além de nos permitir verificar para que valores de b não existe solução da equação de Euler-Lagrange, leva-nos à obtenção de uma extremal, (3.4.10), na forma explícita $x = x(y)$.

Conclusão

O Maple revelou-se muito útil na determinação da equação de Euler-Lagrange e dos respectivos integrais de momento e energia, para funcionais do tipo (1.2.1), assim como, na resolução das mesmas que, tal como já foi referido, são em geral de difícil resolução.

Embora equivalentes o Maple não resolve da mesma forma a equação de Euler-Lagrange e o integral de momento/energia: do ponto de vista matemático a dificuldade é a mesma (podemos deduzir umas equações a partir das outras), mas do ponto de vista do Maple não. Em todos os problemas estudados, no capítulo um, concluímos ser mais vantajoso trabalhar com a equação de Euler-Lagrange, uma vez que o processo recorrendo aos integrais envolve mais cálculos e nem sempre conseguimos obter a extremal numa forma exacta, tal como sucedeu no exemplo 1.3.9, em §1.3.1.

No entanto, no capítulo dois, só conseguimos encontrar uma solução satisfatória para o problema da Braquistócrona recorrendo ao integral de energia.

Como já foi referido, a função **EulerLagrange** permite trabalhar com funcionais com mais de uma variável dependente, mas tem algumas limitações.

Uma dessas limitações é que só podemos obter as equações de Euler-Lagrange para problemas com derivadas de ordem um, ficando de fora os problemas que envolvem derivadas de ordem superior. Seguindo a sugestão apresentada no help do package **VariationalCalculus** e recorrendo a alguns artifícios, solucionámos um problema que envolvia a derivada de ordem dois (exemplo 1.5.2). Uma vez que o Maple inclui a sua própria linguagem de programação utilizámos, como alternativa de resolução do problema abordado no referido exemplo, uma função criada em [22], eliminando por outro processo a limitação referida.

Os sistemas actuais de computação algébrica em geral e, em particular o Maple, colocam à nossa disposição ambientes de computação científica extremamente sofisticados e poderosos. Proporcionam já muito conhecimento matemático e permitem estender esse conhecimento por intermédio de linguagens de programação de alto nível, próximas da linguagem matemática.

Tal como demos a conhecer no problema resolvido em §1.5.2, podem ser definidas funções, implementando não só funcionalidades já existentes mas também novas funcionalidades, com o objectivo de melhorar os packages do Maple.

A teoria clássica inclui também problemas envolvendo integrais múltiplos (várias variáveis

independentes). Neste caso a funcional a minimizar ou maximizar toma a forma:

$$J[x(\cdot, \dots, \cdot)] = \int \dots \int L \left(t_1, \dots, t_r, x, \frac{\partial x}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial x}{\partial t_r} \right) dt_1 \dots dt_r.$$

Outra limitação da função **EulerLagrange** é o facto de não poder ser aplicada a funcionais que dependem de funções de várias variáveis. Este caso não foi explorado nesta dissertação, mas a resolução, via **Maple**, de problemas deste tipo pode ser encontrada em [22].

Tal como foi referido, utilizando versões posteriores ou anteriores à versão 9.5 do **Maple**, os resultados obtidos podem não aparecer de forma idêntica à aqui apresentada.

Exemplificando esta situação, na resolução do problema explorado no exemplo 1.3.9, através do comando `dsolve({eqEL1[1], x(0)=1, x(1)=4}), x(t))` obtivemos de imediato a extremal $x(t) = (7t + 1)^{\frac{2}{3}}$. Na versão 6 do **Maple** ao executar o referido comando nada nos é devolvido, pelo que a solução terá de ser obtida recorrendo a outro processo [19, pp. 226, 227].

Situações semelhantes surgem também no processo de determinação da extremal para o problema da Braquistócrona, uma vez que, em algumas versões anteriores não se conseguia obter uma solução satisfatória para o mesmo. Robert M. Corless, em [5], utiliza uma versão do **Maple** que apenas lhe permitiu encontrar uma forma implícita para a extremal do problema da Braquistócrona. Como tal, Corless conclui que a representação paramétrica usual da cicloide, $x = r(\theta - \sin \theta)$, $y = (1 - \cos \theta)$, é muito superior à representação implícita que o **Maple** devolve e acrescenta que seria muito útil se o **Maple** conseguisse encontrar tal solução para uma equação diferencial dada.

Com a versão 9.5 do **Maple** conseguimos determinar uma forma paramétrica, (2.4.8), da extremal para o problema da Braquistócrona. A representação (2.4.8) obtida é, no entanto, inferior à representação paramétrica usual da cicloide, a qual acabamos por conseguir determinar, via **Maple**, através de alguns artifícios matemáticos.

O **Maple** permite criar representações gráficas de várias curvas, separadamente ou em simultâneo. Os recursos gráficos aliados ao estudo do problema da Braquistócrona foram, no nosso entender, uma mais valia.

Concluimos que o **Maple** se trata também de um bom ambiente de experimentação, uma vez que permitiu gerar e resolver vários problemas através da alteração de valores.

Nem sempre fomos bem sucedidos na simplificação de expressões via **Maple**, mas indiscutivelmente este sistema revelou ser muito eficiente e extremamente rápido na realização dos mais variados cálculos algébricos, levando assim a uma optimização do tempo e à eliminação de possíveis erros.

Defendemos que é necessário, além de conhecimento matemático, alguma experiência na utilização dos sistemas de computação algébrica de modo a serem usados convenientemente. É extremamente importante saber avaliar e criticar a informação devolvida ao executarmos comandos nestes sistemas.

Interessante foi também concluir que apesar do problema da Braquistócrona ter cerca de trezentos anos, ainda existem questões em aberto relacionadas com o mesmo.

Em §3.4, provou-se que a equação (3.4.1) não tem solução para $b > \frac{\pi}{2}$.

Em [21], o autor conjectura que, para $b > \frac{\pi}{2}$, $T(y)$ talvez alcance o seu mínimo em P_{br} - a curva braquistócrona que une A a $(\frac{\pi}{2}, 0)$ e o segmento de recta que une $(\frac{\pi}{2}, 0)$ e B .

Apêndice A

Função criada em Maple

Função que devolve as equações de Euler-Lagrange para problemas com n variáveis dependentes e com derivadas até a ordem m , [22]:

```
> ELnXmDX := proc(n,m,f)
>   local variaveis, lista, Vdep, Vder, Derivadas, C, i, j, L, DtL, EQ, aux;
>   #variaveis são as variáveis da função f, devem ser do tipo
      (t,x1,...,xn,dx1,...,dmx1,...,dxn,...,dmxn)
>   variaveis := op([1,1..1],f):
>   lista := [variaveis]:

>   #Vdep é uma sequência com os nomes das variáveis dependentes,
      Vder é uma sequência com os nomes das derivadas,
      Derivadas é uma lista com os nomes das variáveis e derivadas normalizadas
>   Vdep := NULL: Vder := NULL:
>   for i from 1 to n do
>     Vdep := Vdep, x[i](t):
>     Vder := Vder, seq(diff(x[i](t),t$j),j=1..m):
>   end do:
>   Derivadas := [t,Vdep,Vder]:

>   #ciclo para calcular as derivadas da função f em ordem
      às suas variáveis
>   for i from 2 to nops(lista) do
>     L[op(i,Derivadas)] := diff(f(variaveis),op(i,lista)):
>     for j from 2 to nops(lista) do
>       aux := subs(op(j,lista)=Derivadas[j],L[Derivadas[i]]):
>       L[op(i,Derivadas)] := aux:
>     end do:
```

```

> end do:

> #ciclo para calcular as derivadas das expressões L
> em ordem à variável independente
> for j from n+2 to nops(Derivadas) do
>   DtL[op(j,Derivadas)] := diff(L[op(j,Derivadas)],t):
> end do:
>
> #C é um conjunto com os índices das derivadas na lista Derivadas
> C := {seq(i,i=n+2..nops(Derivadas))}:
>
> #Passar as equações para uma lista, EQ[1] é a equação EL
> da variável x[1](t),...,EQ[n] é a equação EL da variável x[n](t)
> EQ := NULL:
> for i from 1 to n do
>   if (n > 1) then
>     EQ := EQ, L[op(i+1,Derivadas)] + add( ((-1)^k)*
>       diff(DtL[op(op(i,C),Derivadas)], [t$(k-1)]), k=1..m ) = 0:
>   else
>     EQ := EQ, L[op(i+1,Derivadas)] + add( ((-1)^k)*
>       diff(DtL[op(op(k,C),Derivadas)], [t$(k-1)]), k=1..m ) = 0:
>   end if;
> end do:
> return(EQ):
> end proc:

```

Apêndice B

Cálculos Auxiliares

B.0.1 Polinómio de Taylor

Seja f derivável até à ordem n no intervalo I e seja $x_0 \in I$. O polinómio

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

denomina-se polinómio de Taylor, de ordem n , de f em volta de x_0 .

O polinómio de Taylor, de ordem 1, de $f(a) = 2\sqrt{1+a^2} + b - a$ em volta de $x_0 = 0$ é:

$$P(a) = f(0) + f'(0)(a - 0)$$

e como, $f(0) = 2 + b$, e $f'(0) = -1$ sendo $f'(a) = \frac{2a}{1+a^2} - 1$, resulta

$$P(a) = 2 + b - 1$$

B.0.2 Cálculos auxiliares relativos ao exemplo em §3.3.2

```
>f := unapply(ThieleInterpolation([[0,1],[0.01,0.01],[1,0]], x), x);
```

$$f := x \mapsto 1 + \frac{x}{-0.000102030406 - 0.9998979694x}$$

```
>f(0),f(1);
```

1,0

Cálculo da primeira e segunda derivadas de f :

```
>f' := D(f)(x);
```

$$f' := \frac{1}{(-0.000102030406 - 0.9998979694x)} + \frac{0.9998979694x}{(-0.000102030406 - 0.9998979694x)^2}$$

```
>f':=simplify(f');
```

$$f' := -\frac{2.550760150 \times 10^{19}}{(5.1015203 \times 10^7 + 4.999489847 \times 10^{11} x)^2}$$

```
>solve(denom(f')=0,x);
```

$$-0.0001020408173, -0.0001020408173$$

```
>f'':=D(D(f))(x);
```

$$f'' := \frac{1.999795939}{(-0.000102030406 - 0.9998979694 x)^2} + \frac{1.999591899 x}{(-0.000102030406 - 0.9998979694 x)^3}$$

```
>f'':=simplify(f'');
```

$$f'' := -2.5 \times 10^{14} \frac{-1.020199958 \times 10^7 + 1.897668667 \times 10^{11} x}{(5.1015203 \times 10^7 + 4.999489847 \times 10^{11} x)^3}$$

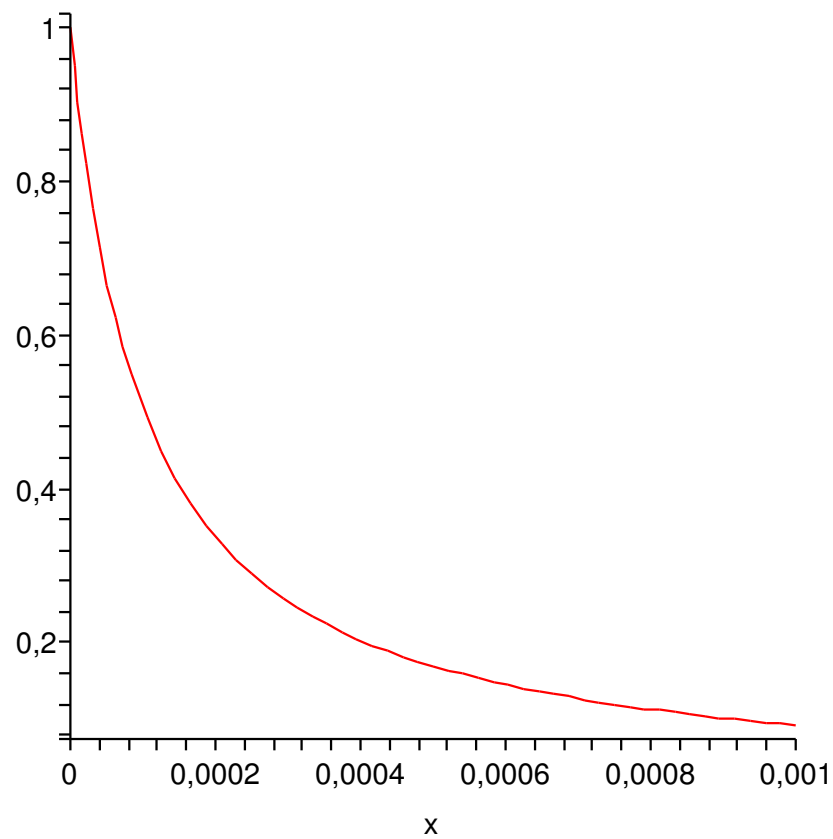
```
>solve(denom(f'')=0,x);
```

$$-0.0001020408173, -0.0001020408173, -0.0001020408173$$

Recorrendo ao comando `plot` do Maple obtivemos as seguintes representações gráficas:

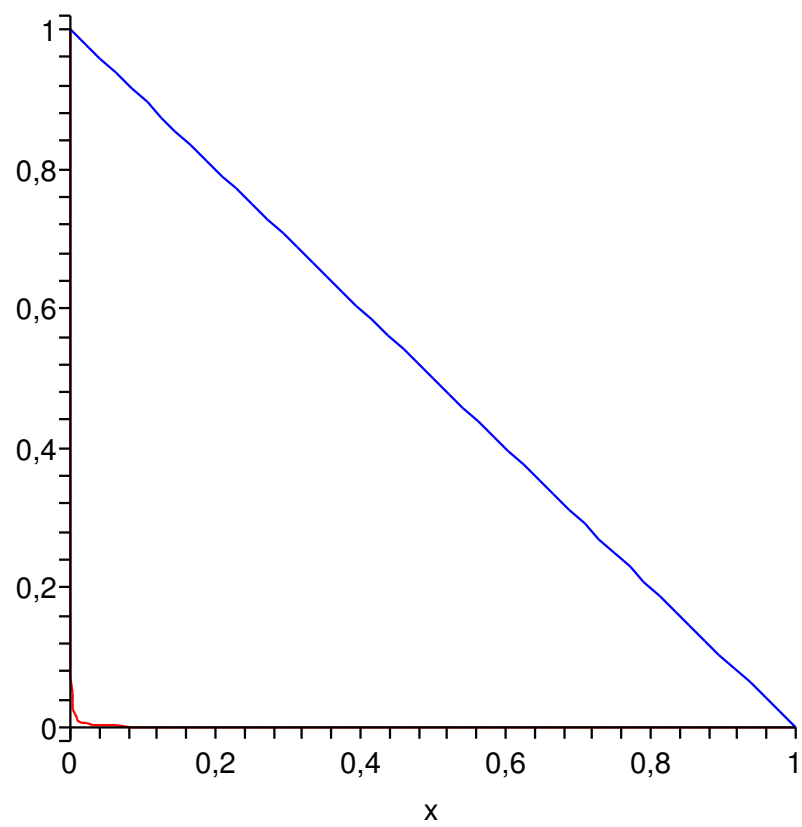
Representação gráfica da função f , definida em §3.3.2, para valores de x a variar entre 0 e 0.001.

```
>plot(f(x),x=0..0.001);
```



Representação gráfica das funções f e y_0 , definidas em §3.3.2, para valores de x a variar entre 0 e 1.

```
>plot([f(x),y0],x=0..1,color=[red,blue]);
```



Bibliografia

- [1] F. R. Dias Agudo, *Análise Real*, Volume III, Escolar Editora, 1992. SDUA 517.5.128.1V.3
- [2] David H. Bailey, Jonathan M. Borwein, *Experimental Mathematics: Examples, Methods and Implications*, Notices of the American Mathematical Society, Volume 52, Number 5, pp. 502-514, 2005.
- [3] George A. Baker, Peter Graves-Morris, *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications*, Volume 14, Addison-Wesley Publishing Company, 1981. UCMA 41A/BAK.PAD/P.2
- [4] G. A. Bliss, *Lectures on Calculus of Variations*, University of Chicago, 1968. SDUA 517.9A.41
- [5] Robert M. Corless, *Sufficiency Analysis for the Calculus of Variations*, Dept. Applied Mathematics, University of Western Ontario, 1994.
- [6] F. S. David, *O Cálculo Variacional Clássico e algumas das suas Aplicações à Física Matemática*, Gabinete de Planeamento de Centros Produtores, Electricidade de Portugal (EDP), 1986. SDUA 517.9.343
- [7] Richard H. Enns, *Computer Algebra Recipes for Mathematical Physics*, Birkhäuser, 2005. SDUA 51-7A.457
- [8] J. Ferguson, *A Brief Survey of the History of the Calculus of Variations and its Applications*, University of Victoria. <http://arxiv.org/ftp/math/papers/0402/0402357.pdf>
- [9] H. H. Goldstine, *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*, Springer-Verlag, 1980. UCMA 49-03/GOL
- [10] Hamilton L. Guidorizzi, *Um curso de Cálculo*, Vol. 1, Livros Técnicos e Científicos Editora, 1997. UCMA 26-01/GUI/V.1
- [11] LaDawn Haws, Terry Kiser, *Exploring the Brachistochrone Problem*, The American Mathematical Monthly, Vol. 102, No. 4, pp. 328-336, 1995.

- [12] M. L. Krasnov, *Cálculo Variacional*, Mir. Moscovo, 1973.
- [13] Frank G. Lether, *Thiele Rational Interpolation for the Numerical Computation of the Reversible Randles-Sevcik Function in electrochemistry*, Journal of Scientific Computing, Vol. 14, No. 3, 1999.
- [14] Elon Lages Lima, *Curso de Análise*, Vol. 1, Projecto Euclides, 1995.
- [15] U. Brechtken-Manderscheid, *Introduction to the Calculus of Variations*, Chapman and Hall Mathematics, 1991. UCMA 49-01/BRE
- [16] *Maple 9 - Learning Guide*, Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc. 2003.
- [17] José L. P. Mello, *A Rampa de Skate do Tempo Mínimo*, Educação e Matemática - Revista da Associação de Professores de Matemática, No. 84, pp. 27-31, 2005.
- [18] John J. O'Connor, Edmund F. Robertson, *MacTutor History of Mathematics Archive*. <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/history/>
- [19] John Oprea, *The Mathematics of Soap Films: Explorations with Maple*, American Mathematical Society, 2000.
- [20] João Ponte, *O computador - Um Instrumento de Educação*, Texto Editora, 1992. ESEC CDI 371.333/34
- [21] Alexander G. Ramm, *Inequalities for Brachistochrone*, Mathematical Inequalities and Applications, Volume 2, No. 1, pp. 135-140, 1999.
- [22] Frederico D. Regateiro, Delfim F. M. Torres, *Extremais do Cálculo das Variações em Maple*, Universidade de Aveiro, Departamento de Matemática, 2006. <http://pam.pisharp.org/handle/2052/121>
- [23] Cristiana J. S. da Silva, *Abordagens do Cálculo das Variações e Controlo Óptimo ao Problema de Newton de Resistência Mínima*, Universidade de Aveiro, Departamento de Matemática, 2005.
- [24] G. Smirnov, V. Bushenkov, *Curso de Optimização - Programação Matemática, Cálculo das Variações, Controlo Óptimo*, Escolar Editora, Lisboa, 2005.
- [25] Donald R. Smith, *Variational Methods in Optimization*, Dover Publications Editora, New York, 1998.
- [26] Delfim F. M. Torres, *Introdução à Optimização Dinâmica*, Universidade de Aveiro, Departamento de Matemática, 2005.

- [27] Eric. W. Weisstein, *Concise Encyclopedia of Mathematics*, CRC Press LLC, 1999. SDUA 031.51A.5
- [28] L. C. Young, *Lectures on the calculus of variations and optimal control theory*, Chelsea Publishing Co., New York, 1980. SDUA 517.7A.23

Índice

- CurveFitting, 58
- EulerLagrange, 9, 10, 38
- Maple, 2, 38
- ThieleInterpolation, 58
- VariationalCalculus, 8
 - combine, 42
 - convert, 13
 - diff, 9
 - display, 47
 - dsolve, 9, 38
 - fsolve, 19, 49
 - plot, 20, 37, 45, 56
 - solve, 11, 59
 - unapply, 59
- Cálculo das Variações, 2, 5
 - ciclóide, 4, 36, 41
 - computação algébrica, 2
 - condição necessária de Euler-Lagrange, 3
 - condição necessária de mínimo fraco local, 7
 - condições de fronteira, 8
- equação de Euler-Lagrange, 7, 8, 38, 60
- equações de Euler-Lagrange, 27
- Euler, 5
- extensões do problema elementar, 25
- extremais, 8
- integração da equação de Euler-Lagrange, 60
- integrais, 4, 10
- integral de energia, 17, 38, 39
- integral de momento, 13
- interpolação racional de Thiele, 57
- Johann Bernoulli, 33
- Lagrange, 5
- Lagrangeano, 7
- mínimo fraco local, 7
- packages, 2
- problema da Braquistócrona, 4, 33, 34, 54
- problema da Tautócrona, 36
- problema de Dido, 23
- problema elementar do cálculo das variações,
 - 7
- Problema Isoperimétrico, 23
- restrição isoperimétrica, 23
- Sistemas de Computação Algébrica, 2
- variantes do problema da Braquistócrona, 53

